1. Classificação *INPE-COM.4/RPE* *C.D.U.: 517.9*	2. Período	4. Distribuição interna ☐ externa ☒
3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor) *EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS* *EQUAÇÕES DIFERENCIAIS*		
5. Relatório nº *INPE-1753-RPE/144*	6. Data *Maio, 1980*	7. Revisado por *Antonio Divino Moura*
8. Título e Sub-Título *EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS*		9. Autorizado por Parada *Nelson de Jesus Parada* *Diretor*
10. Setor *DCE*	Código	11. Nº de cópias *08*
12. Autoria *René A. Medrano-B.* René A. Medrano B. 13. Assinatura Responsável		14. Nº de páginas *232* 15. Preço

16. Sumário/Notas

Apresentam-se os métodos principais de solução das equações diferenciais ordinárias de primeira e ordem superior. Os métodos para resolver equações de primeira ordem que são vistos, entre outros, são os de Variáveis Separadas, Exatas, Fatores de Integração, Homogêneas, Isobáricas e Autovalores em Sistemas de Equações. Para a solução das equações lineares de ordem superior com coeficientes constantes, são expostos os métodos de Coeficientes Indeterminados, Operadores, Variação de Parâmetros e o das Transformadas Integrais (Fourier, Fourier-Seno, Fourier-Co-seno e Laplace). Atenção especial é dado ao método de Solução em Séries de Potências para o caso das equações lineares com coeficientes variáveis, resolvendo-se as equações de Legendre, Bessel, Laguerre, Schrödinger, etc. que são familiares dentro da Física. O trabalho conclui com o estudo de alguns casos especiais de equações não lineares

17. Observações

AGRADECIMENTOS

Agradeço, ao Dr. A.D. Moura e à M.S.I.S. Batista pela revisão crítica, de onde sairam questões cujas respostas me levaram a ampliar o conteúdo inicial.

Agradeço também a Neusa M.D. Bicudo pelas sugestões que melhoraram a redação do texto.

O trabalho de datilografia foi paciente e eficientemente realizado por Regina Lucia de Souza Bruno, para ela minha gratidão.

ÍNDICE

RESUMO

Neste trabalho, expõe-se os métodos principais de solução das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, e lineares de ordem superior, com um desenvolvimento teórico que é considerado ser suficiente para que o leitor possa resolver problemas propostos em livros mais especializados. Dentro das equações de primeira ordem são vistos, entre outros, os casos de Variáveis Separadas, Diferenciais Exatas, Fatores de Integração, Homogêneas, Isobáricas, Problema de Autovalor em Sistemas de Equações, e uma discussão sobre a Existência e Unicidade na Solução das Equações de Primeira Ordem. Segue-se um estudo das Equações Lineares de ordem superior com coeficientes constantes, onde são expostos, entre outros, os métodos dos Coeficientes Indeterminados, dos Operadores, da Variação de Parâmetros e o método das Transformadas Integrais (de Fourier, Fourier-Seno, Fourie-Co-seno e Laplace). As Equações Lineares com coeficientes variáveis são tratadas, primeiro sob o ponto de vista de redução da ordem da equação, quando possível e conveniente, e depois expondo a Solução em Séries de Potências (método de Frobenius), em torno de Pontos Ordinários e Singulares Regulares, onde são considerados todos os casos especiais da Equação Indicial. Em seguida, e como exemplos de solução em séries de potências, resolvem-se as equações diferenciais que aparecem mais comumente em problema físicos, tais como as equações de Legendre, Bessel, Laguerre, Schrödinger, Hermite e a Associada de Legendre. Finalmente, são estudadas alguns casos especiais de equações não lineares. Supõe-se que o leitor tenha, apenas a preparação matemática que os cursos de Engenharia ou Ciências E

xatas normalmente fornecem. Contudo, familiarização com os Capítulos II (INPE-1449-RPE/014, Mar., 1979) e IV(INPE-1494-RPE/038, Maio, 1979) deste autor, facilitará uma maior compreensão do material aqui apresentado. Da mesma forma que os trabalhos nesta linha, deste autor, que precedem ao presente, este foi, também baseado em notas de aula do curso Metódos Matemáticos da Física, que o autor ministra no programa de pós-graduação do INPE.

ABSTRACT

In this work, a concise treatment of first order and higher order differential equations is developed. The subject covered is, however, considered to be enough as to allow the reader solve problems found im more specialized books.

Among the first order equations, the cases of Separable Variables, Exacts, Integration Factors, Homogeneous, Isobarics, Eigenvalues Problems in Systems of Equations, and also a discussion on the Existence and Uniqueness of the Solutions are developed. It follows a study of higher order Linear Differential Equations with Constant Coefficients, where the methods of Undetermined Coefficients, Operators, Variation of Parameters, and the Integral Transforms (Fourier, Fourier-Sine, Fourier-Cosine and Laplace) are presented. For the Linear Equations with Variable Coefficients, the Reduction of the Equation's Order, whenever possible and convenient, is first considered. Then, it follows a detailed treatment of the Power Series Solution (Frobenius series) around Ordinary and Regular Singular Points. As examples of the series solutions, differential equations, well known in physics, like the Legendre, Bessel, Laguerre, Schrödinger, Hermite and Associated Legendre differential equations are solved. At the end, especial cases of non-linear differential equations are also presented.

The reader is supposed to be familiar with only the undergraduate mathematics that is commonly taught in the Engineering and Exact Sciences Departments. However, a familiarity with Chapter II (INPE-1449-RPE/014, Marc. 1979) and IV (INPE-1494-RPE/038, May 1979) will help in the full understanding of this work. The subject matter covered in this report, as it was the case of the previous works along this line, was based on the lecture notes on the Mathematical Methods of Physics course that the author teaches in the graduate program of INPE.

CAPÍTULO VII

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

7.1 - INTRODUÇÃO

As equações diferenciais se constituem em um dos campos de estudo de maior importância da matemática aplicada, considerando-se que quase todas as leis da Física podem ser expressas em forma de equações diferenciais. A solução destas equações, obedecendo certas condições de contorno (iniciais e, ou, geométricas) conhecidas, resulta na aplicação prática destas leis.

Uma *Equação Diferencial (E.D.)* é definida como uma equação que contenha derivadas, ou diferenciais, de uma função incógnita em relação a uma ou mais variáveis independentes. A solução de uma E.D. consiste em encontrar a função incógnita, tal que quando substituida na E.D., obtenha-se uma identidade. A teoria das E.Ds. trata dos diferentes métodos que visam encontrar tal função incógnita.

Uma E.D. é chamada de *Equação Diferencial Ordinária (E.D.O.)*, quando na equação aparecem derivadas em relação a uma variável independente. Assim, por exemplo, a equação.

$$y' \, y''' - 3(y'')^2 = 0$$

onde,

$$y' = \frac{dy}{dx} \tag{VII.1.1}$$

é uma equação ordinária, porque todas as derivadas são em relação à variável x.

Entretanto, uma equação que contenha derivadas em relação a duas, ou mais, variáveis independentes, é chamada de *Equação Diferencial Parcial (E.D.P.)* um exemplo de uma E.D.P. é:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \;, \qquad \text{(VII.1.2)}$$

onde x, y, e z são variáveis independentes. Equações diferenciais deste tipo serão estudadas em capítulos posteriores.

A *ordem de uma E.D.*, é determinada pela ordem da maior derivada existente na equação. Assim, a E.D.O. (VII.1.1) é uma E.D. de terceira ordem. No entanto, a E.D.P (VII.1.2) é de segunda ordem. A propósito da ordem de uma E.D., é necessário apontar que ela indica também o número de *constante de integração* que se encontrarão presentes na solução da E.D.. Por exemplo, a E.D., extremamente simples,

$$y''' = 0$$

é de terceira ordem e, portanto, sua solução possuirá três constantes de integração. Assim, integrando esta E.D. um vez

$$C_3 = \int y''' \, dx = \int \frac{d}{dx} (y'') \, dx = \int d \, (y'') = y''$$

e logo integrando esta nova expressão, por duas vezes sucessivas, tem-se que

$$y(x) = C_1 + C_2x + \frac{C_3}{2}x^2 ,$$

onde se destacam as três constantes de integração C_1, C_2 e C_3.

É importante ressaltar a presença do número N de constantes de integração, correspondentes a uma E.D. de ordem N, especialmente porque representam a flexibilidade da solução, para aceitar as condições (iniciais, valores definidos no contorno dentro do qual é válido a E.D.) físicas e, ou geométricas que a solução final deve satisfazer em problemas práticos. Uma solução que contenha um número constantes de integração igual à ordem da E.D., é chamada de *solução geral*.

Um outro aspecto comumente usado na classificação de E.D. é o seu grau. O *grau de uma E.D.* é definido pela potência da maior derivada da equação. Desta maneira, pode-se ver que a E.D.O. (VII.1.1) é do primeiro grau, embora exista um termo contendo o quadrado da segunda derivada.

A solução de uma E.D.O. pode ser obtida numa forma *fechada* (quando a solução é expressa em termos de funções elementares, onde a função incógnita encontra-se em forma explicita ou implicita), em *série de potências* (quando é expressa em forma de uma soma, finita ou infinita, de potências da variável independente x), numa forma *aproxi-*

mada (quando a solução satisfaz a E.D. dentro de uma margem de erro muito pequena) e mediante uma integração *numérica* (quando em cada ponto a solução é obtida numericamente com a ajuda de computador). Neste capítulo serão desenvolvidos os principais métodos que levam a soluções em forma fechada e em séries de potências.

EXEMPLO 7.1

Como um exemplo da aplicação das equações diferenciais, na solução de problemas físicos, considere-se um corpo de massa m lançado com uma velocidade inicial v_0, ao longo de um plano inclinado de ângulo α, da maneira indicada na Figura VII.1. O coeficiente de atrito entre o corpo e o plano, é μ. Seja, encontrar a distância máxima que o corpo percorre, antes de ser completamente freado.

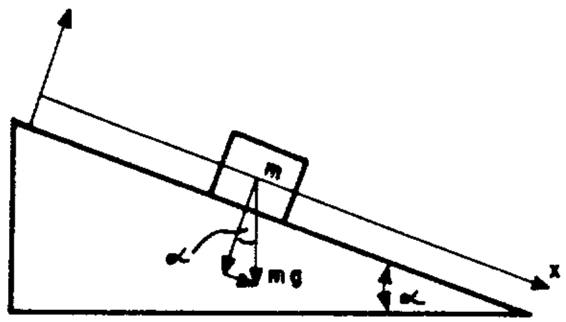

Fig. VII.1 - Corpo de massa m escorregando ao longo do plano inclinado de angulo α.

A equação de movimento do corpo será dada pela relação de forças que nele atuarem, em um dado instante.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Força resultante}\\ \text{que controla o movi-}\\ \text{mento do corpo}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Componente da força}\\ \text{de gravidade ao lon-}\\ \text{go do plano, que favo-}\\ \text{rece o movimento do}\\ \text{corpo}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{Força de atrito,}\\ \text{que se opõe ao}\\ \text{movimento do cor-}\\ \text{po}\end{array}\right\}$$

$$m \frac{dv}{dt} = m g \operatorname{sen} \alpha - \mu m g \cos \alpha$$

Neste caso, tem-se uma equação ordinária de primeira ordem e de primeiro grau, onde a função incógnita é v(t). A solução é obtida mediante uma integração direta.

$$\int \frac{dv}{dt}\, dt = g \cos \alpha \, (tg\, \alpha - \mu) \int dt + C$$

onde, C é uma constante de integração. Portanto

$$v = g \cos \alpha \, (tg\, \alpha - \mu)\, t + C.$$

A constante de integração é encontrada mediante a condição inicial $v(0) = v_0$. Assim,

$$v = v_0 + g \cos \alpha \, (tg\, \alpha - \mu)\, t$$

Todavia, $v = \frac{dx}{dt}$. Logo, pode-se integrar a relação anterior, mais uma vez, resultando

$$x = v_0\, t + \frac{1}{2}\, g \cos \alpha \, (tg\, \alpha - \mu)\, t^2,$$

onde aplicou-se a condição $x(0) = 0$. A distância máxima, x_{max}, será percorrida num tempo, t_{max}, tal que $v(t_{max}) = 0$. Pode-se ver que:

$$t_{max} = \frac{-v_0}{g \cos \alpha \, (tg\alpha - \mu)} = \frac{v_0}{g \cos \alpha \, (\mu - tg\alpha)}$$

Observe-se que, a condição para que o corpo seja freado é que

$$\mu > tg\ \alpha,$$

pois, de outra maneira, o resultado para t_{max} não fará nenhum sentido. Portanto,

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha \, (\mu - tg\ \alpha)} - \frac{1/2\ v_0^2}{g \cos \alpha \, (\mu - tg\ \alpha)}$$

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{2\ g \cos \alpha \, (\mu - tg\ \alpha)}$$

Deve-se notar que solução deste problema, assim como as implicações dos resultados, seria difícil de ser encontrada, se não fosse sua abordagem diferencial.

7.2 - EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Dependendo da forma e características peculiares das E.D.Os. de primeira ordem, existem tratamento especiais que permitem sua integração. Os métodos mais comuns são apresentados a seguir:

7.2.1 - Equações com Variáveis Separadas

As E.D.Os de primeira ordem, que têm a forma (ou podem ser reduzidas à forma)

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0, \qquad \text{(VII.2.1)}$$

podem ser integradas diretamente. Uma equação que tenha tal forma é chamada de *equação de variáveis separadas*. A E.D. do Exemplo 7.1 (na realidade duas equações, uma para a variável dependente v(t) e a outra para a variável x(t) é deste tipo.

EXEMPLO 7.2

$$\sqrt{1 + x^2}\; y\, y' = x\,\sqrt{1 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{1 + y^2}}{y\sqrt{1 + x^2}} \quad ; \quad \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}\,dy - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx = 0$$

Pode-se ver que esta equação é do tipo (VII.2.1). Portanto, sua solução se reduz a uma simples integração termo a termo.

$$\int \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}\,dy - \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx = C$$

$$\sqrt{1 + y^2} - \sqrt{1 + x^2} = C.$$

EXEMPLO 7.3

$$x^2\ y\ dx = (1 + x)\ dy$$

$$\frac{x^2}{1 + x}\ dx = \frac{dy}{y}$$

Às vezes, como neste caso, a integração requer um pouco mais de trabalho. Integrando-se o primeiro membro por partes, tem-se:

$$\frac{(x + 1)^2}{2} - 2(x + 1) + \ell n(x + 1) + C' = \ell n\ y$$

Rearranjando os termos, tem-se a seguinte solução explícita.

$$y = C(x + 1)\ e^{\frac{1}{2}(x+1)^2 - 2(x+1)}$$

7.2.2 - Diferenciais Exatas

São E.Ds. do tipo

$$P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0, \qquad \text{(VII.2.2)}$$

onde, as funções $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ guardam uma relação mútua, tal que sua integração é quase imediata. Visando encontrar a relação entre $P(x,y)$ e $Q(x,y)$, considere-se a função.

$$f(x,y) = a \tag{VII.2.3}$$

A diferencial desta função é:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = 0 \tag{VII.2.4}$$

Evidentemente, se esta "equação diferencial" for integrada, necessariamente terá que reproduzir (exceto pela constante a) a função primitiva (VII.2.3). Isto é,

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \int \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = f(x,y) = C,$$

onde C é uma constante de integração (que poderá ser C = a, depois de aplicar a condição inicial, ou de contorno da função). Por esta razão, a equação (VII.2.4) é chamada de *diferencial exata*. Comparando-se os coeficientes de dx e dy das relações (VII.2.2) e (VII.2.4), pode-se ver que

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \text{ e } \; Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\,. \tag{VII.2.5}$$

Derivando-se as duas expressões, a primeira em relação a y e a segunda em relação a x, tem-se:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,.$$

Portanto,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{(VII.2.6)}$$

sendo esta a relação entre as funções P(x,y) e Q(x,y) para que a E.D. (VII.2.2) seja uma diferencial exata.

EXEMPLO 7.4

Seja integrar a seguinte E.D.

$$(x + y)\ dx + x\ dy = 0\ .$$

Observe-se que,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}\ .$$

Logo, a E.D. é uma diferencial exata. Assim, o problema se reduz à identificação da função primitiva.

$$x\ dx + y\ dx + x\ dy = 0$$

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d(x\ y) = 0$$

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right) + x\ y \quad = 0$$

de onde resulta que:

$$\frac{x^2}{2} + x\, y = C.$$

Aparentemente, a integração de uma diferencial exata depende muito da habilidade pessoal de cada um, já que o problema consiste em identificar a função primitiva. Em geral sabe-se, por experiência pessoal, que de fato a maior parte dos problemas matemáticos, dependem muito da habilidade individual para se chegar a soluções rápidas. Entretanto, para este caso particular, de equações que correspondem a diferenciais exatas, é possível se obter uma solução geral, conforme é visto em seguida.

Integrando-se a primeira das equações (VII.2.5) na variável x, entre um limite fixo x_0, e um ponto arbitrário x, tem-se:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\, dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = f(x,y) - A(y)$$

onde, a "constante de integração", $A(y) = f(x_0,y)$ aparece porque a integração foi feita somente na variável x. Rearranjando-se a equação anterior, tem-se que

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + A(y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\, dx + A(y) \qquad \text{(VII.2.7)}$$

Substituindo-se f(x,y), desta relação, na segunda das equações (VII.2.5), vem:

$$Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + A(y)\right] = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \frac{d\,A(y)}{dy}$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + A'(y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + A'(y),$$

de onde,

$$A'(y) = Q(x_0,\ y).$$

Logo,

$$A(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ y)\,dy$$

onde o limite inferior y_0 é fixo, e o y um ponto arbitrário que corresponde à variável x. Finalmente, substituindo-se o valor encontrado de A(y) na relação (VII.2.7), tem-se a solução:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ y)\,dy = K = \text{constante} \qquad \text{(VII.2.8)}$$

Se a integração tivesse sido feita primeiro sobre a função Q(x,y), o resultado seria

$$\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\ dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx = k. \qquad \text{(VII.2.9)}$$

Os termos que contêm os limites, arbitrários, de integração x_0 e y_0 são absorvidos pela constante de integração após um pouco de algebra, conforme se poderá apreciar nos exemplos que se seguem.

EXEMPLO 7.5

Para ilustrar o uso das soluções (VII.2.8) ou (VII.2.9), considere-se a mesma E.D. do Exemplo 7.4.

$$(x + y)\ dx + x\,dy = 0$$

$$\int_{x_0}^{x} (x + y)\ dx + \int_{y_0}^{y} x_0\ dy = K$$

$$\frac{1}{2}\,(x^2 - x_0^2) + y(x - x_0) + x_0(y - y_0) = K$$

$$\frac{1}{2}\,x^2 + x\,y = K + \frac{1}{2}\,x_0^2 + x_0\,y_0 = C$$

EXEMPLO 7.6

Seja a equação

$$(x^2 + y^2)^2 (x\,dx + y\,dy) + x^5\,dx = 0.$$

Rearranjando-se vem:

$$\left[x(x^2 + y^2)^2 + x^5 \right] dx + y(x^2 + y^2)^2\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4\,x\,y\,(x^2 + y^2) = \frac{\partial Q}{\partial x}\;.$$

Assim, a E.D, deste exemplo, é uma diferencial exata. Entretanto, a função primitiva, neste caso, é um pouco mais difícil de se visualizar. A solução (VII.2.8) fica,

$$\int_{x_0}^{x} \left[x(x^4 + 2x^2\,y^2 + y^4) + x^5 \right] dx + \int_{y_0}^{y} y(x_0^4 + 2x_0^2\,y^2 + y^4)\,dy = K$$

Integrando-se esta expressão e depois de se fazer as simplificações, agrupando-se os termos constantes no segundo membro, tem-se:

$$\frac{2\,x^6 + y^6}{6} + \frac{1}{2}\,x^4\,y^2 + \frac{1}{2}\,x^2\,y^4 = K_1\,,$$

ou

$$x^6 + (x^2 + y^2)^3 = C$$

7.2.3 - Fatores de Integração - Equação Linear de 1a. Ordem

Considere-se, novamente, equações, do tipo

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad \text{(VII.2.10)}$$

onde as funções $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ não apresentam, necessariamente, propriedades específicas entre si. Demonstra-se que sempre é possível encontrar um fator $\lambda(x,y)$, tal que quando este fator multiplica a equação (VII.2.10), a equação resultante é uma diferencial exata. Portanto, o problema consiste em determinar tal fator, problema que, às vezes, resulta ser mais difícil do que resolver a E.D. em si. Contudo, muitas vezes o problema se simplifica, consideravelmente, quando se supõe que o fator depende de uma única variável. Em todos estes casos, o fator procurado é chamado de fator de integração.

Um exemplo trivial é representado pela equação

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

Verifique-se que esta E.D. não é uma diferencial exata. Porém, se for multiplicada pelo fator $\lambda(x,y) = \dfrac{1}{xy}$, ela será convertida numa diferencial exata

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0 \; ,$$

já que,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

A seguir, veja-se de que maneira este fator pode ser determinado. Multiplicando-se a equação (VII.2.10) pelo fator $\lambda(x,y)$, tem-se:

$$\lambda(x,y)\ P(x,y)\ dx + \lambda(x,y)\ Q(x,y)\ dy = 0.$$

A condição para que esta equação resultante seja uma diferencial exata é:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x,y)\ P(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x,y)\ Q(x,y)\right].$$

Isto é,

$$P\frac{\partial\lambda}{\partial y} - Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \qquad \text{(VII.2.11)}$$

Observe-se que esta equação é uma equação diferencial parcial, cuja solução é, evidentemente, muito mais difícil que a equação ordinária proposta. Desta maneira, conclui-se que, em geral, o problema de achar fatores de integração não é uma tarefa muito fácil. Contudo, em determinados casos isto é possível, especialmente quando se supõe que λ é função de uma única variável como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 7.7

Seja a equação

$$(x^2 - y^2)\, dy = 2\, x\, y\, dx$$

Pode-se verificar que, para $P(x,y) = 2\, x y$, e $Q(x,y) = - (x^2 - y^2)$, $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Isto é, a E.D, não é uma diferencial exata.

Suponha-se, primeiro que $\lambda = \lambda(x)$. Assim a equação (VII.2.11) fica:

$$(x^2 - y^2) \frac{d\lambda}{dx} + \lambda(2x + 2x) = 0.$$

Isto é,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{4x}{x^2 - y^2}\, dx = 0.$$

Fica evidente que a solução desta equação, não será unicamente função de x, mas também da variável y, contrariando a suposição inicial de $\lambda = \lambda(x)$. Portanto, esta suposição inicial não funciona.

Suponha-se, agora que $\lambda = \lambda(y)$. A equação (VII.2.11), para este caso, fica:

$$2xy\frac{d\lambda}{dy} + \lambda(2x + 2x) = 0,$$

de onde,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} + 2\frac{dy}{y} = 0.$$

Integrando-se esta equação, tem-se:

$$\lambda(y) = \frac{K}{y^2}$$

Este fator, evidentemente, satisfaz plenamente a situação. Multiplicando-se a E.D. do exemplo, por este fator de integração, tem-se

$$2\frac{x}{y}dx - \frac{x^2 - y^2}{y^2}dy = 2\frac{x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy + dy = d(\frac{x^2}{y}) + dy = d(\frac{x^2}{y} + y) = 0$$

de onde resulta que:

$$\frac{x^2}{y} + y = C$$

Equações diferenciais, que possam ser colocadas na forma

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\,y = g(x) \tag{VII.2.12}$$

podem ser integradas, de uma forma geral, multiplicando-as por um fator de integração $\lambda = \lambda(x)$. A equação (VII.2.12) é uma expressão generalizada de uma *equação linear de primeira ordem*.

Comparando-se as relações (VII.2.10) e (VII.2.12), indentificam-se

$$P(x,y) = y\, f(x) - g(x) \quad ; \quad Q(x,y) = 1.$$

Fazendo-se $\lambda = \lambda(x)$, a equação (VII.2.11) fica:

$$- \frac{d\lambda}{dx} + \lambda\, f(x) = 0.$$

Integrando-se esta equação (depois de colocá-la na forma de variáveis separadas) tem-se o fator de integração procurado:

$$\lambda(x) = e^{\int f(x)\, dx}$$

Continuando, multiplicando-se por este fator a E.D. (VII.2.12), vem:

$$e^{\int f(x)\, dx}\, dy + y\, f(x)\, e^{\int f(x)\, dx}\, dx = g(x)\, e^{\int f(x)\, dx}\, dx.$$

Pode-se ver que o primeiro membro é uma diferencial exata do tipo

$$d\left[y\, e^{F(x)} \right] = e^{F(x)}\, dy + y\, e^{F(x)} \frac{d\, F(x)}{dx}\, dx,$$

onde,

$$F(x) = \int f(x)\, dx \quad e \quad \frac{d\,F(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = f(x).$$

Logo, a E.D. fica

$$d\left[y\, e^{\int f(x)\, dx}\right] = g(x)\, e^{\int f(x)\, dx}\, dx.$$

Integrando-se ambos os membros, tem-se:

$$y\, e^{\int f(x)\, dx} = \int g(x)\, e^{\int f(x)\, dx}\, dx + C. \qquad \text{(VII.2.13)}$$

Esta relação fornece a solução geral das equações lineares de primeira ordem.

<u>EXEMPLO 7.8</u>

$$x\, dy + x^2\, dx = y\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}\, y = -\, x.$$

Esta equação, assim rearranjada, é do tipo da (VII.2.12). Portanto, sua solução é dada pela relação (VII.2.13). O seu fator de integração é:

$$\lambda(x) = e^{\int f(x)\, dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ell n\, x} = e^{\ell n\, \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\, .$$

Logo,

$$\frac{y}{x} = \int (-x) \frac{1}{x} dx + C = - x + C$$

$$y = Cx + x^2$$

7.2.4 - Equação de Bernoulli

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + f(x) y = y^n g(x), \qquad \text{(VII.2.14)}$$

é uma espécie de generalização da equação linear de primeira ordem. Esta equação é chamada de *equação de Bernoulli*.

A solução da equação (VII.2.14) é encontrada mediante a mudança da variável $u = y^{1-n}$, ou alternativamente, $y = v(x) w(x)$. Embora a primeira alternativa seja a mais comum, quaisquer destas mudanças de variável conduzem à solução.

Fazendo-se a mudança $u = y^{1-n}$, de onde $\frac{dy}{dx} = \frac{u^{\frac{n}{1-n}}}{1-n} \frac{du}{dx}$, ou, mais simplesmente, $y' = \frac{u'}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}}$, a equação (VII.2.14) fica:

$$u' + (1 - n) f(x) u = (1 - n) g(x) . \qquad \text{(VII.2.15)}$$

Esta equação nova é uma equação linear de primeira ordem e cuja solução já é conhecida.

Com a substituição, $y(x) = v(x)\ w(x)$, a equação de Bernouilli fica:

$$v'\ w + \left[\ f(x)\ w + w'\right]\ v = v^n\ w^n\ g(x).$$

Já que $v(x)$ e $w(x)$ são funções arbitrárias, sem nenhuma relação mútua, pode-se impor uma condição, a fim de que ambas as funções fiquem completamente determinadas. Assim, escolhendo-se

$$f(x)\ w + w' = 0$$

tem-se que

$$w(x) = e^{-\int f(x)\ dx} \qquad \text{(VII.2.16)}$$

Logo, a equação que determina a função $v(x)$ é dada por

$$v' = w^{n-1}\ g(x)\ v^n \qquad \text{(VII.2-17)}$$

que resulta em ser uma equação de variáveis separadas e, portanto, de integração conhecida.

EXEMPLO 7.9

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3.$$

Esta equação é do tipo de Bernoulli. Como ilustração, esta E.D. será integrada, fazendo-se uso das duas mudanças de variáveis indicadas acima.

a) $u = y^{-2}$

$$u' - 2xu = -2x^3$$

A solução desta equação é:

$$u\, e^{-2\int x\,dx} = -2\int x^3\, e^{-\int x\,dx}\, dx + C,$$

ou seja,

$$u\, e^{-x^2} = -2\int x^3\, e^{-x^2}\, dx + C$$

A integral em si é, aparentemente, complicada. Porém, efetuando-se a troca de variável $x^2 = \xi$, a integração fica mais fácil.

$$\int x^3\, e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \xi\, e^{-\xi}\, d\xi = -\frac{1}{2}\, e^{-\xi}\,(\xi + 1).$$

Assim, a solução deste exemplo, é:

$$y^2 \left[e^{-x^2}(x^2 + 1) + C \right] = e^{-x^2}$$

b) $y = v(x)\ w(x)$

$$v'\ w + (x\ w + w')\ v = v''\ w^n\ x^3$$

As equações (VII.2.16) e (VII.2.17) ficam, respectivamente,

$$w(x) = e^{-\frac{x}{2}} \quad ; \quad v' = x^3\ e^{-\frac{x}{2}}\ v^3.$$

Integrando-se a última equação, tem-se

$$\int \frac{dv}{v^3} = \int x^3\ e^{-x^2}\ dx$$

A integral do segundo membro é a mesma encontrada anteriormente. O que resta é trivial.

7.2.5 - Troca de Variável

Às vezes, uma simples mudança de variável facilita consideravelmente a integração. Por exemplo, as equações da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + bx + c) \qquad \text{(VII.2.18)}$$

tem uma solução simples, quando se faz a mudança

$$u = ax + bx + c.$$

Derivando-se esta expressão em relação a x, obtém-se

$$b \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - a.$$

Substituindo-se este resultado na equação (VII.2.18) tem-se,

$$b\ f(u) = \frac{du}{dx} - a$$

$$\frac{du}{a + b\,f(u)} - dx = 0 \qquad \text{(VII.2.19)}$$

Esta nova equação é de variáveis separadas.

EXEMPLO 7.10

$$2(x + y)\ dx - dy = 0.$$

Esta equação, colocada na forma (VII.2.18) fica

$$\frac{dy}{dx} = 2(x + y).$$

Assim, a equação (VII.2.19), após uma mudança apropriada, fica

$$\frac{du}{2(1+u)} - dx = 0$$

Integrando-se, e após uma manipulação algébrica, pode-se ver que a solução da E.D. proposta, é:

$$y = \frac{1}{2} C\, e^{2x} - x - \frac{1}{2}$$

7.2.6 - Equações Homogêneas

A fim de ressaltar o sentido do termo "Homogêneo", empregado em E.D.O. de primeira ordem, lembra-se que, na física, uma equação é chamada de dimensionalmente homogênea (no sentido de que as unidades físicas sejam as mesmas) quando todos os termos da equação têm a mesma dimensão (ou unidade) física. Por exemplo, a energia total (não relativística), de um corpo de massa m em movimento, é a soma de sua energia cinética mais a potencial,

$$E_T = \frac{1}{2} m\, v^2 + m\, g\, h.$$

Embora os entes físicos (massa, velocidade, aceleração, e altura), que participam da equação, representem conceitos diferentes a unidade de cada termo tem que ser homogêneo (i.e. cada termo tem que ter as mesmas unidades físicas). No caso da expressão anterior, a dimen mensão de cada termo é $\left[\frac{ML^2}{T^2}\right]$, onde M, L e T são unidades de massa, comprimento e tempo, respectivamente.

Um outro exemplo simples constitui a relação que fornece a área total de um cilindro circular de raio r e altura h,

$$A_{cil} = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Para se saber se esta relação é dimensionalmente homogênea, substitui-se r por ρL e h por κL, onde ρ e κ representam o valor numérico (adimensional) de r e h, respectivamente. Assim, a dimensionalidade da área do cilindro será

$$L^2 + LL \rightarrow L^2$$

Em termos gerais, pode-se dizer que a área total do cilindro é uma função do raio de base circular r e da sua altura h.

$$A_{cil} = A(r,h) = A(\rho L, \kappa L) = L^2 A(\rho, \kappa).$$

Nesta última expressão foi indicada, também, sua dimensionalidade.

De uma maneira análoga, uma função f(x, y, z, ...) é chamada de *função homogênea de grau n,* quando for satisfeita a relação

$$f(ax, ay, az, \ldots) = a^n f(x, y, z, \ldots).$$

Assim, para o caso da área do cilindro, pode-se dizer que esta é uma função homogênea de segundo grau, no comprimento.

Uma equação diferencial do tipo

$$P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0$$

é chamada de *equação homogênea*, quando as funções P(x,y) e Q(x,y) forem funções homogêneas do mesmo grau. E.Ds. deste tipo podem ser reduzidas ao tipo de variáveis separadas, com a troca de variável.

$$y = x\ u(x),$$

ou, também,

$$x = y\ u(y).$$

EXEMPLO 7.11

$$(x + y)^2\ dx = x\ y\ dy$$

Fazendo-se $x \rightarrow ax$ e $y \rightarrow ay$, tem-se:

$$(ax + ay)^2\ d(ax) = (ax)\ (ay)\ d(ay)$$

$$a^3\ (x + y)^2\ dx = a^3\ x\ y\ dy.$$

Assim, a E.D. proposta é uma equação homogênea de 3º grau.

$$y = ux, \qquad dy = x\,du + u\,dx.$$

Substituindo-se na E.D., vem:

$$(x + ux)^2\,dx = x^2\,u\,(x\,du + u\,dx).$$

Depois de um pouco de álgebra, tem-se:

$$\frac{u}{1 + 2u}\,du - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{u}{2} - \frac{1}{4}\,\ell n\,(2u + 1) - \ell n\,x = C'$$

$$x(2u + 1)^{1/4} = C\,e^{\frac{u}{2}},$$

de onde,

$$x\left[2\frac{y}{x}+1\right]^{1/4} = C\,e^{\frac{y}{2x}}.$$

EXEMPLO 7.12.

$$y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$$

É trivial ver que esta equação também é homogênea. Assim, a substituição, $y = ux$, dá como resultado

$$u\,x\,dx + (2\sqrt{u\,x^2} - x)\,(x\,du + u\,dx) = 0$$

$$u\,dx + x\,(2\sqrt{u} - 1)\,du + (2\sqrt{u} - 1)\,u\,dx = 0$$

$$\frac{2\sqrt{u} - 1}{2u\sqrt{u}}\,du + \frac{dx}{x} = 0$$

Integrando-se,

$$x\,u = C\,e^{-u^{-1/2}}$$

de maneira que, a solução é:

$$y = C\,e^{-\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

7.2.7 - Equações com Coeficientes Constantes

Existe também um tipo de equação que, sem ser homogênea, pode ser transformada numa equação homogênea. Uma equação deste tipo é:

$$(ax + by + c)\,dx + (kx + \ell y + m)\,dy = 0 \qquad \text{(VII.2.20)}$$

Esta E.D. é chamada de *equação com coeficientes constantes*, e pode ser resolvida fazendo-se as seguintes trocas de variável:

$$x = \xi + \alpha \qquad\qquad y = \eta + \beta,$$

onde α e β são parâmetros a serem ainda determinados de maneira a satisfazerem condições convenientes. Com estas novas variáveis, a equação (VII.2.20), depois de rearranjada convenientemente, fica:

$$(a\xi + b\eta)\, d\xi + (k\xi + \ell\eta)d\eta + (a\alpha + b\beta + c)d\xi + (k\alpha + \ell\beta + m)d\eta = 0 \qquad \text{(VII.2.21)}$$

Agora, calcula-se os valores de α e β de maneira que se eliminem os dois últimos termos. Assim:

$$\left.\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c &= 0 \\ k\alpha + \ell\beta + m &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.2.22)}$$

As soluções deste sistema são

$$\alpha = \frac{mb - c\ell}{a\ell - kb} \quad , \quad \beta = \frac{kc - am}{a\ell - kb} \, .$$

Evidentemente, para soluções finitas de α e β é necessário que $a\ell - kb \neq 0$. Para este caso, a equação (VII.2.21) fica:

$$(a\xi + b\eta)\, d\xi + (k\xi + \ell\eta)\, d\eta = 0 \qquad \text{(VII.2.23)}$$

Esta equação é homogênea e, portanto, facilmente integrável pelo método descrito anteriormente.

Quando $a\ell - kb = 0$, e se ainda se quiser ter soluções finitas para α e β, será necessário que $mb - c\ell = 0$ e, também, que $kc - am = 0$.

Estas condições podem ser expressas na forma:

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{\ell} = \frac{c}{m} = K = \text{constante}$$

Esta relação de proporcionalidade significa que as duas equações (VII.2.22) são proporcionais entre si. Isto é, as duas representam apenas uma equação. Portanto, a equação (VII.2.20) pode ser escrita na forma:

$$K(kx + \ell y + m)\ dx + (kx + \ell y + m)\ dy = 0$$

ou também:

$$(kx + \ell y + m)\ (K\ dx + dy) = 0 \qquad \text{(VII.2.24)}$$

Consequentemente, tem-se duas soluções para este caso. A solução geral, obtida da integração de

$$K\ dx + dy = 0$$

$$K\ \ x + \ \ y = 0.$$

Esta solução é chamada de *solução geral*, uma vez que permite a aplicação de condições iniciais ou de contorno.

A outra solução

$$kx + \ell y + m = 0$$

é chamada de *solução particular*.

Um detalhe, que facilita a determinação dos parâmetros α e β, é que, de acordo com as equações (VII.2.22), os seus valores numericos representam o ponto de integração entre as retas:

$$ax + by + c = o$$

e

$$kx + \ell y + m = 0$$

Evidência-se que, quando estas retas são paralelas, se tem o caso $a\ell - kb = 0$

EXEMPLO 7.13

$$(x - y + 3)\, dx + (3x + y + 1)\, dy = 0$$

Para este caso, o ponto de intersecção entre retas é:

$$\alpha = -1$$

$$\beta = 2.$$

logo:

$$x = \xi - 1 \quad ; \quad y = \eta + 2.$$

Da equação (VII.2.23),

$$(\xi - \eta)\, d\xi + (3\xi + \eta)\, d\eta = 0$$

Fazendo-se a troca de variável, $\eta = u\xi$, a equação se transforma em

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{3 + u}{(u + 1)^2}\, du = 0$$

Integrando-se esta equação e retornando-se às variáveis originais, tem-se a solução da E.D.

$$y = 1 - x + C\, e^{x+y-1}$$

7.2.8 - Equações Isobáricas

Estas equações representam a generalização das equações homogêneas. Considere-se, outra vez, a equação diferencial do tipo

$$P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0 \qquad \text{(VII.2.25)}$$

Suponha-se, ainda, que esta equação não seja homogênea. Porém, atribuindo-se a y uma dimensionalidade representada por a^r (em relação à dimensionalidade de x que é a), a equação fica dimensionalmente homogênea, então a E.D. (VII.2.25) pode ser convertida numa de variáveis separadas, mediante a substituição $y = u\, x^r$.

O problema consiste em determinar o valor da potência r de maneira que a E.D. (VII.2.25) seja uma equação homogênea. O cálculo de r pode ser efetuado seguindo-se o seguinte procedimento. Substituindo-se x por ax e y por $a^r y$, a equação (VII.2.25) fica:

$$P(ax, a^r y)\, d(ax) + Q(ax, a^r y)\, d(a^r y) = 0$$

$$a^{n+1} P(x,y)\, dx + a^{m+r} Q(x,y)\, dy = 0$$

onde, supõe-se que as funções P(x,y) e Q(x,y) são funções homogêneas de grau n e m, respectivamente. Fica evidente que, para que a equação seja homogênea, será necessário que

$$n + 1 = m + r,$$

de onde determina-se o valor de r. As equações diferenciais, que podem ser tratadas desta maneira, são chamadas de *equações isobáricas*.

EXEMPLO 7.14

$$2x^2 \frac{dy}{dx} + xy - 4 = 0$$

Esta E.D., reescrita numa forma mais conveniente, fica

$$x\, y\, dx - 4\, dx + 2x^2\, dy = 0.$$

Atribuindo-se as dimensionalidades $x \rightarrow ax$, e $y \rightarrow a^r y$, pode-se escrever a seguinte " expressão dimensional" da equação diferencial:

$$[a\ a^r\ a] + [a] + [a^2\ a^r].$$

Fica evidente que, para que esta expressão (e, portanto, a E.D.) seja dimensionalmente homogênea, as potências deverão satisfazer à condição:

$$r + 2 = 1$$

de onde, $r = -1$. Logo a mudança de variável apropriada, neste caso, será: $y = u\ x^{-1}$.

Diferenciando-se a relação anterior, tem-se

$$dy = x^{-1}\ du - u\ x^{-2}\ dx.$$

A E.D. proposta, com estas substituições, fica:

$$(4 + u)\ dx - 2x\ du = 0.$$

Integrando-se esta nova equação (de variáveis separadas) e voltando-se às variáveis originais, tem-se a seguinte solução:

$$x\ y = C\ x^{1/2} - 4$$

EXEMPLO 7.15

$$x\, y^2(3y\, dx + x\, dy) - (2y\, dx - x\, dy) = 0.$$

Como antes, $x \to ax$; $y \to a^r y$. Logo, a expressão dimensional fica:

$$[\, a\, a^{2r}\, a^r\, a\,] + [\, a\, a^{2r}\, a\, a^r\,] + [\, a^r\, a\,] + [\, a\, a^r\,],$$

de onde, pode-se ver que a condição de homogeneidade fica satisfeita, quando

$$3\, r + 2 = r + 1.$$

Assim,

$$r = -\frac{1}{2},$$

Logo a substituição apropriada, é $y = u\, x^{-1/2}$, ou também, $u^2 = x\ \ y^2$. Chamando-se $u^2 = v = x\, y^2$ e diferenciando-se esta relação

$$dx = y^{-2}\, dv - 2y^{-3}\, v\, dy,$$

pode-se ver que, a E.D. proposta, com estas substituições, fica

$$v[\, 3y(y^{-2}\, dv - 2y^{-3}\, v\, dy) + y^{-2}\, v\, dy] - [\, 2y(y^{-2}\, dv - 2y^{-3}\, v\, dy) - y^{-2}\, v\, dy\,] = 0$$

ou,

$$\frac{3v - 2}{5v(1 - v)} dv + \frac{dy}{y} = 0$$

Esta última equação, com as variáveis separadas, é de fácil integração.

A solução final, depois de colocá-la em termos das variáveis originais, é a seguinte:

$$x^2 y^2(1 - x y^2) = C$$

É necessário ressaltar, nas " expressões dimensionais" dos exemplos anteriores, que, as equações isobáricas têm a característica de apresentar termos homogêneos em dois grupos. Isto é, os termos da E.D. podem ser agrupados no máximo em dois grupos homogêneos de diferente grau. Este fato facilita o reconhecimento de uma equação isobárica.

7.2.9 - Equações de Clairaut e d'Alembert - Lagrange

Às vezes, a substituição $p = \frac{dy}{dx}$, é muito útil na solução de equações diferenciais. Uma aplicação, desta substituição, é nas equações de grau superior ao primeiro grau, conforme é ilustrado no exemplo que se segue.

EXEMPLO 7.16

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) = 1 .$$

Pode-se ver que esta E.D. é uma equação de primeira ordem, e de segundo grau. Fazendo-se a substituição $p = \dfrac{dy}{dx}$, a E.D. proposta fica

$$p^2 + p\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) - 1 = 0.$$

Resolvendo-se esta equação algébrica, de segundo grau em p, tem-se:

$$p = -\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 + 4}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{x}{y} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)$$

Assim, segue-se que as soluções são:

$$p_1 = \frac{x}{y} \quad , \quad p_2 = -\frac{y}{x}$$

A primeira solução,

$$p_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} ,$$

fornece uma solução da E.D.:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1' \quad ; \; y^2 = x^2 + C_1 \; .$$

Entretanto, a outra solução de p,

$$p_2 = \frac{dy}{dx} = - \frac{y}{x}$$

fornece uma segunda solução da E.D.:

$$\ell n \; y = - \ell n \; x + \ell n \; C_2' \quad ; \quad y = \frac{C_2}{x} \; .$$

As duas soluções são igualmente válidas, podendo-se escolher qualquer uma que satisfaça o comportamento físico do problema. Neste caso, as famílias de curvas que representam cada solução, encontram-se matematicamente relacionados, já que as derivadas destas curvas, para o mesmo ponto, são tal que $p_1 = - \frac{1}{p_2}$. Esta relação é simplesmente a condição de ortogonalidade entre ambas as famílias. Logo, a família de hipérboles equiláteras, $y = \frac{C_2}{x}$, é ortogonal à família de hipérboles $x^2 - y^2 = C$.

Entretanto, a aplicação mais importante da substituição $p = \frac{dy}{dx}$ é feita no tipo de equações diferenciais, que serão estudas a seguir:

Uma E.D. do tipo

$$y - x \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad \text{(VII.2.26)}$$

é chamada de *equação de Clairaut*. Colocando-se a equação (VII.2.26) em função de p, e derivando-se a equação resultante, tem-se:

$$p - (p + x \frac{dp}{dx}) = \frac{df}{dp} \frac{dp}{dx} .$$

Rearranjando, tem-se

$$\frac{dp}{dx} \left(x + \frac{df}{dp} \right) = 0$$

de onde se tem

$$\frac{dp}{dx} = 0 \qquad e \qquad x + \frac{df}{dp} = 0 \qquad \text{(VII.2.27)}$$

Integrando-se a primeira equação, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, encontra-se a seguinte solução:

$$y = C_1 x + C_2$$

Substituindo-se esta solução na equação (VII.2.26), pode-se ver que, as constantes de integração C_1 e C_2 encontram-se relacionadas mediante

$$C_2 = f(C_1)$$

Assim, uma das soluções da E.D. (VII.2.26) é a seguinte:

$$y = C_1\, x + f(C_1) \tag{VII.2.28}$$

A segunda das equações (VII.2.27) fornece uma outra solução da E.D. de Clairaut. Esta segunda solução pode ser obtida eliminando-se p entre a segunda das equações (VII.2.27)

$$x + \frac{df}{dp} = 0,$$

onde $\frac{df}{dp}$ é apenas uma função de p, e a equação de Clairaut

$$y - xp = f(p).$$

Pode-se ver que esta segunda solução, assim obtida, é apenas uma solução particular, uma vez que esta solução independe de qualquer constante de integração. Portanto, a solução (VII.2.28) é a solução geral da equação de Clairaut, já que ela permite satisfazer certas condições de contorno (iniciais, físicas, geométricas, etc.) conhecidas. Pode-se provar que a solução particular é a envoltória da família de retas (VII.2.28).

EXEMPLO 7.17

$$y = x\,y' + y'^2 = x\,p + p^2 \cdot$$

Neste caso, $f(p) = p^2$.

Portanto, a solução geral da E.D. é

$$y = Cx + C^2.$$

A solução particular é obtida da eliminação de p entre as equações

$$y = x\,p + p^2 \quad \text{e} \quad x + \frac{d}{dp}(p^2) = 0,$$

de onde vem que:

$$y = -\frac{1}{4}x^2$$

Uma espécie de generalização da equação de Clairaut é a chamada *equação de d'Alembert - Lagrange*, definida por

$$y = x\,f(p) + g(p), \qquad \text{(VII.2.29)}$$

onde, $p = \dfrac{dy}{dx}$. A solução desta E.D. é obtida empregando-se o mesmo método utilizado na solução da equação de Clairaut. Por sinal, este méto do é, às vezes, chamado de *método da derivada*. Derivando-se a equação (VII.2.29), em relação a x, e rearranjando-se os termos apropriadamente, tem-se:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{x\, f'(p)}{p - f(p)} = \frac{g'(p)}{p - f(p)}, \qquad \text{(VII.2.30)}$$

onde, $f'(p) = \frac{df}{dp}$ e $g'(p) = \frac{dg}{dp}$. Pode-se notar que, a equação (VII.2.30) é uma equação linear, cuja solução é dada pela equação (VII.2.13)

Substituindo-se p, obtida da solução (VII.2.30), na relação (VII.2.29), tem-se a solução da E.D..

EXEMPLO 7.18

$$y = x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1.$$

ou também,

$$y = x\, p^2 + 1.$$

Esta equação é do tipo D'Alembert - Lagrange, onde $f(p) = p^2$ e $g(p) = 1$. Portanto, a equação (VII.2.30), para este caso, fica:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2xp}{p - p^2} = \frac{2x}{1 - p} .$$

A solução é obtida mediante uma integração simples, já que a equação resultante é de variaveis separadas. Assim,

$$p = 1 - \frac{C}{x^{1/2}} .$$

A solução da E.D. proposta é obtida substituindo-se este resultado na própria E.D.

$$y = (x^{1/2} - C)^2 + 1$$

7.2.10 - Problema de Autovalor em Sistemas de E.Ds. Lineares

Um sistema de equações diferenciais lineares consiste em um conjunto de equações onde existe uma única variável não dependente e duas, ou mais, variáveis dependentes. De maneira análoga ao problema algébrico, um sistema de E.Ds. fica determinado quando existe um número de equações igual ao número de variáveis dependentes. Assim, por exemplo o sistema

$$\frac{dy}{dx} + 6y = \frac{dz}{dx} , \qquad 3z - \frac{dz}{dx} = 2\frac{dy}{dx}$$

é completamente determinado, uma vez que existem duas equações diferenciais para as variáveis dependentes $y(x)$ e $z(x)$.

Existem vários métodos para a solução de sistemas de equações diferenciais, incluindo o método de eliminação (de incógnitas) comumente empregado nas equações algébricas. Entretanto, os métodos mais comuns requerem conhecimentos que ainda serão desenvolvidos neste capítulo (por exemplo, o método dos operadores). Um dos métodos mais "elegantes" é o das transformadas integrais, especialmente o da transformada de Laplace, que possue diversas aplicações, algumas das quais foram ilustradas no capítulo anterior (ver Exemplo 6.14) e cuja aplicação às E.Ds. lineares será desenvolvida em seções posteriores. Nesta sub-seção tratar-se-ão dos sistemas de E.Ds. lineares de primeira ordem.

Suponha-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{dy_1}{dx} = A_{11}\, y_1 + A_{12}\, y_2 + \dots + A_{1j}\, y_j + \dots + A_{1N}\, y_N$$

$$\frac{dy_2}{dx} = A_{21}\, y_1 + A_{22}\, y_2 + \dots + A_{2j}\, y_j + \dots + A_{2N}\, y_N$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_N}{dx} = A_{N1}\, y_1 + A_{N2}\, y_2 + \dots + A_{Nj}\, y_j + \dots + A_{NN}\, y_N$$

Este sistema de equações diferenciais pode ser representado, convenientemente, da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx}\, y_i = \sum_j A_{ij}\, y_j \quad ; i = 1, 2, \dots, N \qquad \text{(VII.2.31)}$$

ou, também, na forma matricial (ver Capítulo II),

$$\frac{d}{dx} \underset{\sim}{y} = A \underset{\sim}{y} \,, \tag{VII.2.32}$$

onde $\underset{\sim}{y}$ é um vetor coluna, cujos elementos são as funções incógnitas, e A é uma matriz quadrada formada com os coeficientes constantes do sistemas de Equações diferenciais.

Note-se que a relação tem a forma de uma equação diferencial de variáveis separadas, cuja solução é:

$$\underset{\sim}{y} = e^{xA} \underset{\sim}{C} \tag{VII.2.33}$$

onde $\underset{\sim}{C}$ é um vetor coluna constante, equivalente à constante de integração das equações diferenciais. Na equação (VII.2.33), é importante notar-se a ordem dos fatores, no segundo membro, uma vez que o fator exponencial é uma matriz quadrada, a saber:

$$e^{xA} = I + xA + \frac{x^2}{2!} A^2 + \frac{x^2}{3!} A^3 + \ldots.$$

De uma maneira similar, pode-se provar que a solução da equação diferencial linear,

$$\frac{d}{dx} \underset{\sim}{y} - A \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{F}\,(x)$$

é

$$\underset{\sim}{y} = e^{xA} \int e^{-xA} \underset{\sim}{F}(x) \; dx + e^{xA} \; C. \qquad \text{(VII.2.34)}$$

Contudo, as soluções (VII.2.33) e (VII.2.34), embora representem soluções elegantes dos respectivos sistemas de equações, não têm utilidade prática, exceto em análises teóricas (ou quando A é uma matriz diagonal) uma vez que seu uso implicaria no desevolvimento em serie da função exponencial, acarretando outro tipo de problemas (por exemplo de convergência). Por esta razão, as soluções da equação (VII.2.32) serão encontradas, a seguir, em uma forma que permita seu uso prático.

Considere-se novamente a equação (VII.2.32), para a qual procurar-se-á uma solução do tipo

$$\underset{\sim}{y} = e^{mx} \underset{\sim}{v}, \qquad \text{(VII.2.35)}$$

onde m e $\underset{\sim}{v}$ são respectivamente, um parâmetro e um vetor coluna constantes, a serem determinados.

Substituindo-se (VII.2.35) em (VII.2.32), tem-se:

$$m \, e^{mx} \underset{\sim}{v} = e^{mx} \, A \, \underset{\sim}{v}$$

ou seja,

$$A \, \underset{\sim}{v} = m \, \underset{\sim}{v} \qquad \text{(VII.2.36)}$$

Fica evidente que esta relação representa um problema de autovalor (ver Seção 2.6 do Capítulo II), onde para cada valor fixo de m (autovalor) corresponde um autovetor $\underset{\sim}{v}$. Os autovalores m são determinados pela equação característica:

$$\det\,(A - mI) = 0, \tag{VII.2.37}$$

onde, dependendo da natureza dos valores de m, deverão ser considerados os casos não-degenerados e os degenerados.

a) *Caso não degenerado*. Chamando-se de $m_1, m_2, \ldots\ldots m_i, \ldots\ldots m_N$, os N autovalores (todos diferentes), e $\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \ldots\ldots \underset{\sim}{v}_i, \ldots\ldots \underset{\sim}{v}_N$, os respectivos autovetores, existirão N soluções do tipo

$$\underset{\approx}{y}_i = e^{m_i x}\ \underset{\sim}{v}_i\ .$$

Considerando-se que os autovetores, correspondentes a autovalores não degenerados, formam um espaço vetorial linearmente independente, conclui-se que as N soluções $\underset{\approx}{y}_i$ são também linearmente independentes. Portanto, a solução geral da equação (VII.2.32) será a combinação linear de todas estas soluções, i.e.,

$$\underset{\approx}{y} = \sum_{i=1}^{N} C_i\ e^{m_i x}\ \underset{\sim}{v}_i \tag{VII.2.38}$$

onde os coeficientes C_i são os chamados constantes de integração.

EXEMPLO 7.19

Seja resolver o seguinte sistema de E.Ds.

$$v' = 3v + 5y + 8z$$

$$y' = -6v - 10y - 16z$$

$$z' = 4v + 7y + 11z,$$

onde

$$v = v(x),\ y = y(x),\ z = z(x).$$

Este sistema de equações, colocado na forma matricial, fica;

$$\frac{d}{dx}\underset{\sim}{y} = A\,\underset{\sim}{y},$$

onde:

$$\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} v \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad e \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ -6 & -10 & -16 \\ 4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

A matriz A desta relação tem como autovalores (ver Exemplo 2.6 do capítulo II): $m = 0, 1, 3$,

e autovetores (Exemplo 2.7 do Capítulo II)

$$\underset{\sim}{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \underset{\sim}{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Portanto, a solução do sistema, de acordo com a relação (VII.2.38), é.

$$\begin{pmatrix} v \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{0x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} + C_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3x} ,$$

ou seja,

$$v = C_1 + C_2\, e^{x} + 4\, C_3\, e^{3x}$$

$$y = C_1 - 2C_2\, e^{x} - 8C_3\, e^{3x}$$

$$z = C_1 + C_2\, e^{x} + 5C_3\, e^{3x}$$

---

b) *Caso degenerado*. Se L dos autovalores da matriz A são degenerados (i.e., $m_I = m_{II} = \ldots.\ m_L$), e se é possível encontrar L autovetores $\underset{\sim}{v}_J$ que, juntamente com os autovetores não degenerados, formem um conjunto linearmente independente, então, a solução (VII.2.38) tem a seguinte forma geral:

$$\underset{\sim}{y} = \sum_{i=1}^{N-L} C_i\, e^{m_i x}\, \underset{\sim}{v}_i + e^{m_L x} \sum_{J=I}^{L} C_J\, \underset{\sim}{v}_J \qquad \text{(VII.2.39)}$$

Contudo, nem sempre uma matriz arbitrária, de autovalores degenerados, possui autovetores linearmente independentes devido aos autovetores degenerados, e, portanto, existe a necessidade de procurar outras soluções.

Por exemplo, suponha-se que em correspondência com os N autovalores (contando inclusive com os degenerados) da matriz do sistema de E.Ds., somente existam N-1 autovetores linearmente independentes. Obviamente, ter-se-ão N-1 soluções, e o problema consiste em encontrar a solução em falta, que, por exemplo, corresponda ao autovalor degenerado m_L.

Procura-se uma solução do tipo

$$\underset{\sim}{y} = e^{m_L x} \left[f(x) \underset{\sim}{v}_a + \underset{\sim}{v}_b \right] ,$$

onde, f(x) é uma função a ser escolhida, de maneira que esta solução exista, e $\underset{\sim}{v}_a$ e $\underset{\sim}{v}_b$ são vetores arbitrários. Substituindo-se a relação anterior na equação (VII.2.32), vem:

$$f' \, e^{m_L x} \underset{\sim}{v}_a + m_L \, e^{m_L x} (f \underset{\sim}{v}_a + \underset{\sim}{v}_b) = e^{m_L x} \; A \, (f \underset{\sim}{v}_a + \underset{\sim}{v}_b)$$

$$f' \underset{\sim}{v}_a + m_L \underset{\sim}{v}_b - A \underset{\sim}{v}_b = f(A \underset{\sim}{v}_a - m_L \underset{\sim}{v}_a).$$

Dado que o vetor $\underset{\sim}{v}_a$ é arbitrário, escolhe-se $\underset{\sim}{v}_a = \underset{\sim}{v}_L$ de maneira que o segundo membro seja nulo, uma vez que $\underset{\sim}{v}_L$ é um dos autovatores degenerados. Assim,

$$f'(x) = \frac{1}{\tilde{v}_L\, v_L}\, \tilde{v}_L\, (A - m_L\, I)\, v_b\ .$$

É interessante notar que v_b não pode ser um autovetor degenerado.

Integrando-se esta expressão, tem-se que $f(x) \propto x$. Logo, o tipo de solução procurada é:

$$y = e^{m_L x}\, (x\, v_L + v_b). \qquad \text{(VII.2.40)}$$

Pode-se mostrar que , se houver a necessidade de encontrar ainda mais uma solução, ela será:

$$y = e^{m_L x}\, (x^2\, v_L + x\, v_c + v_d)\ , \qquad \text{(VII.2.41)}$$

Outras soluções são encontradas formando polinômios de grau superior, similares ao mostrado na equação (VII.2.41).

Os vetores v_c e v_d são determinados de maneira que seja satisfeita a E.D. matricial. Assim, substituindo-se (VII.2.41) em (VII.2.32), e igualando-se os coeficientes das mesmas potências de x, encontram-se as duas equações seguintes:

$$(A - m_L\, I)\ v_c = 2\, v_L$$

$$(A - m_L\, I)\ v_d = v_c$$

Dado que: det(A - m_L I) = 0, nenhuma das duas equações têm soluções únicas. Porém, a primeira pode ser resolvida em função de pelo menos, um parâmetro livre (um dos elementos do vetor $\underset{\sim}{v}_c$). Fixando-se, arbitrariamente, o valor deste parâmetro, prossegue-se com a segunda equação, onde, novamente, se enfrenta o mesmo problema, resolvendo-se, também da mesma maneira.

A escolha dos parâmetros livres é realmente arbitrária. Evidentemente, isto significa que as soluções gerais, assim obtidas, terão coeficientes diferentes em correspondência com a escolha dos parâmetros livres. Contudo, a solução do sistema de E.Ds., sujeito a condições específicas, terá que ser a mesma, qualquer seja a forma dos coeficientes da solução geral.

EXEMPLO 7.20

Encontre-se a solução do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$y' = 14y + 66z - 42w$$

$$z' = 4y + 24z - 14w$$

$$w' = 10y + 55z - 33w.$$

Neste caso, a matriz A do sistema é:

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 66 & -42 \\ 4 & 24 & -14 \\ 10 & 55 & -33 \end{pmatrix},$$

onde se pode verificar que os autovalores correspondentes são:

$$m_1 = 1, \quad m_2 = m_3 = 2.$$

O autovetor correspondente a m_1 é:

$$\underset{\sim}{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Os autovetores degenerados $\underset{\sim}{v}_J$ satisfazem à equação.

$$\begin{pmatrix} 12 & 66 & -42 \\ 4 & 22 & -14 \\ 10 & 55 & -35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = 0$$

Pode-se verificar que as três equações, decorrentes da relação anterior, são todas proporcionais à equação única

$$2\, d_1 + 11\, d_2 - 7\, d_3 = 0$$

Logo, qualquer conjunto de valores numéricos para d_1, d_2 e d_3 que satisfaçam a relação anterior, dará origem a autovetores degenerados. Dentre estes, escolhe-se dois que, juntamente com $\underset{\sim}{v}_1$, sejam linearmente independentes. Assim, escolhendo-se

$$d_3 = 0 \quad ; \; d_1 = -\frac{11}{2}\, d_2,$$

tem-se

$$\underset{\sim}{v}_I = \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, fazendo

$$d_1 = 0 \; , \quad d_3 = \frac{11}{7}\, d_2$$

vem:

$$\underset{\sim}{v}_{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Pode-se verificar que os vetores $\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{v}_I$ e $\underset{\sim}{v}_{II}$ são linearmente independentes. Portanto, a solução (VII.2.39), fica:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{x} + C_2 \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} e^{2x},$$

de onde vem que a solução geral do sistema linear de equações diferenciais, é:

$$y = 6\ C_1\ e^{x} - 11\ C_2\ e^{2x}$$

$$z = 2\ C_1\ e^{x} + (2\ C_2 + 7\ C_3)\ e^{2x}$$

$$w = 5\ C_1\ e^{x} + 11\ C_3\ e^{2x}$$

É interessante observar que, se na equação $2d_1 + 11d_2 + 7d_3=0$, se fizesse $d_2 = 0$, de onde $2d_1 = 7d_3$, ter-se-ia o vetor:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Assim, a solução geral poderia, também, ser expressa por:

$$y = 6\ C_1\ e^{x} + (7\ C_3 - 11\ C_2)\ e^{2x}$$

$$z = 2\ C_1\ e^{x} + 2\ C_2\ e^{2x}$$

$$w = 5\ C_1\ e^{x} + 2\ C_3\ e^{2x}$$

EXEMPLO 7.21

Encontre-se a solução do seguinte sistema de E.Ds.

$$w' = -8w + 47y - 8z$$

$$y' = -4w + 18y - 2z$$

$$z' = -8w + 39y - 5z.$$

Pode-se verificar que os autovalores da matriz do sistema

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 47 & -8 \\ -4 & 18 & -2 \\ -8 & 39 & -5 \end{pmatrix}$$

são, respectivamente, $m = 1, 2, 2.$

Em correspondência ao autovalor $m_1 = 1$, tem-se o autovetor

$$\underset{\sim}{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O leitor pode verificar que o único autovetor que corresponde ao autovalor degenerado $m_d = 2$, é:

$$\underset{\sim}{v}_d = \begin{bmatrix} 17 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Portanto, há a necessidade de se procurar uma terceira solução do tipo (VII.2.40)

$$\underset{\sim}{y} = e^{2x} (x \underset{\sim}{v}_d + \underset{\sim}{v}_b).$$

Substituindo-se esta expressão na E.D. matricial $\frac{d}{dx} \underset{\sim}{y} = A \underset{\sim}{y}$, e igualando-se os coeficientes das mesmas potências de x, vem:

$$(A - 2 I) \underset{\sim}{v}_b = \underset{\sim}{v}_d .$$

Evidentemente, esta equação não tem solução única e deverá ser resolvida em termos de um dos elementos de $\underset{\sim}{v}_b$ (α, β, γ,). A expressão anterior fica:

$$\begin{bmatrix} -10 & 47 & -8 \\ -4 & 16 & -2 \\ -8 & 39 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 17 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
-10\alpha + 47\beta - 8\gamma &= 17 \\
-4\alpha + 16\beta - 2\gamma &= 6 \\
-8\alpha + 39\beta - 7\gamma &= 14
\end{aligned}
$$

Das primeiras duas equações, deste conjunto, tem-se:

$$\beta = \frac{7 + 6\alpha}{17} \quad , \quad \gamma = \frac{5 + 14\alpha}{17} \quad .$$

Com estes, valores a terceira é apenas uma identidade. Logo o vetor resultante $\underset{\sim}{v}_b$ é:

$$\underset{\sim}{v}_b = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17\alpha \\ 7 + 6\alpha \\ 5 + 14\alpha \end{pmatrix} .$$

Escolhendo-se $\alpha = 0$, vem

$$\underset{\sim}{v}_b = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Desta maneira, a solução fica:

$$\underset{\sim}{y} = C_1 \underset{\sim}{v}_1 e^{x} + C_2 \underset{\sim}{v}_d e^{2x} + C_3(x \underset{\sim}{v}_d + \underset{\sim}{v}_b) e^{2x}$$

ou mais explicitamente:

$$w = 6\,C_1\,e^{x} + 17\,C_2\,e^{2x} + 17\,C_3\,x\,e^{2x}$$

$$y = 2\,C_1\,e^{x} + 6\,C_2\,e^{2x} + C_3\left(\frac{1}{17} + 6x\right)e^{2x}$$

$$z = 5\,C_1\,e^{x} + 14\,C_2\,e^{2x} + C_3\left(\frac{5}{17} + 14x\right)e^{2x}.$$

7.2.11 - Sobre a Existência e Unicidade das Soluções de uma E.D. de Primeira Ordem

Antes de se proceder à integração de uma equação do tipo

$$y' = F(x,y), \tag{VII.2.42}$$

e especialmente, quando sua solução não pode ser determinada pelos métodos conhecidos, parece lógico (e até mais conveniente) se fazer uma análise previa da E.D. em si, visando determinar se existe alguma solução para a E.D., e se esta solução é única. Fica evidente que este tipo de análise pode poupar esforços de integração caso não exista solução da E.D. em determinadas regiões de interesse.

A teoria sobre a existência e unicidade das soluções de uma E.D. é bastante extensa e foge ao escopo deste trabalho. Contudo, este assunto sendo importante, deve ser apresentando nos pontos mais relevantes, ainda que não sejam oferecidas maiores justificativas.

As condições suficientes para a existência e unicidade das soluções de equações do tipo (VII.2.42) podem ser resumidas da seguinte maneira:

Se a função, $F(x,y)$, e sua derivada parcial, $\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)$, forem reais, finitas, unívocas e contínuas em todos os pontos (x,y) dentro de uma região R do plano x-y, e se a solução satisfazer a condição $y(x_0) = y_0$, então a E.D.(VII.2.42) tem uma solução única para qualquer ponto dentro da região R.

Contudo, as condições mencionadas acima, não são todas necessárias. Isto é, embora as condições não sejam todas satisfeitas, ainda pode existir uma solução única. De fato, a condição de continuidade de função $F(x,y)$ é suficiente para garantir a existência da solução.

EXEMPLO 7.22

Seja a equação diferencial

$$y' = 2\sqrt{y}\ .$$

Pode-se ver que, solução reais desta equação existem a penas para valores positivos de y. Assim, a região no plano x-y onde existem soluções da equação proposta, é $y \geqslant 0$.

Por outro lado,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y^{-1/2} .$$

Esta função é contínua e finita, exceto no ponto $y = 0$. Desta maneira, a região de existência e unicidade da solução da equação $y' = 2\sqrt{y}$ é $y > 0$. A condição de $F(x,y)$ ser unívoca é contornada, escolhendo-se somente um dos valores de função (que, neste caso, é bivalente). Isto é, equivalente a ter um corte de ramificação ao longo de eixo real negativo do "plano complexo y".

De fato, a solução da equação proposta (equação de variáveis separadas), é

$$\sqrt{y(x)} = x - C \quad ; \quad y > 0.$$

Nesta solução, a função $F(x,y)$ foi considerada de comportamento unívoco. Desta maneira, tem-se uma restrição adicional para a variável independente, já que $x - C > 0$. Assim, a solução final fica

$$y(x) = (x - C)^2$$

7.3 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM SUPERIOR

Equações diferenciais da forma.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + f_{n-2}(x)\,\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_0(x)\,y = F(x). \qquad \text{(VII.3.1)}$$

são chamadas de *Equações diferenciais lineares de ordem n*. Neste caso, o termo "linear" deve ser interpretado no sentido de representar uma equação diferencial, onde a função incógnita, y, e suas derivadas, aparecem somente em primeiro grau (apenas potências de primeiro grau), e que, também, não existem termos que contenham produtos entre (ou, em geral, funções que contenham) y e suas derivadas. Assim, exemplos de *equações diferenciais não lineares* são quase todas as E.Ds. de primeira ordem, estudadas na Seção anterior. Outros exemplos de equações não lineares são

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} y = 0 \quad ; \quad \left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + x\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + y = e^x$$

Retornando-se à E.D. linear (VII.3.1), onde se deve prestar atenção à função F(x) que se encontra no segundo membro, é necessário distinguir os dois casos seguintes. Quando F(x) = 0, a E.D. resultante

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + f_{n-2}\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + f_0(x)\;y = 0 \qquad \text{(VII.3.2)}$$

é chamada de *equação linear reduzida*. Quando $F(x) \neq 0$, a E.D. linear (VII.3.1) também é chamada de *equação linear completa*. É necessário chamar a atenção do leitor para a equação (VII.3.2), que é comumente chamada de *equação linear homogênea* dando-se a denominação *linear não homegênea*, à equação (VII.3.1). Entretanto, esta nomenclatura entra em conflito com o conceito de homogeneidade anteriormente associado às E.Ds., homogêneas de primeira ordem. Por esta razão, neste capítulo evitar-se-á o emprego do termo homogêneo, embora esta terminologia seja utilizada nos capítulos, correspondentes às E.Ds. parciais, onde desaparece este problema de denominação.

Ainda, em relação aos métodos de soluções empregados, a E.D. linear será estudada, distinguindo-se dois casos: Quando os coeficientes, $f_j(x)$, são parâmetros constantes, e quando estes coeficientes são funções arbitrárias de x. Os métodos de solução, para o primeiro caso, serão expostos nas próximas subseções, deixando-se para fim desta seção a solução, em forma fechada, de E.Ds. lineares simplificadas, ou de propriedades especiais, que corresponde ao segundo caso. Um estudo mais generalizado das E.Ds. lineares, com coeficientes variáveis, será desenvolvido na seção 7.6.

7.4 - E.D. LINEAR COM COEFICIENTES CONSTANTES

7.4.1 - E.D. Linear Reduzida

Este tipo de equação diferencial, é o mais simples das E. Ds, lineares. Sua forma genérica, é a seguinte:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \qquad \text{(VII.4.1)}$$

Conforme será visto, a equação (VII.4.1) admite soluções do tipo

$$y = e^{mx} \qquad \text{(VII.4.2)}$$

Substituindo-se esta solução na equação (VII.4.1), e após as simplificações necessárias, tem-se que:

$$m^n + a_{n-1}m^{n-1} + a_{n-2}m^{n-2} + \ldots + a_1 m + a_0 = 0 \qquad \text{(VII.4.3)}$$

Esta equação resultante é conhecida pelo nome de *Equação Característica* da equação reduzida. O problema consiste, então, em encontrar os valores de m que satisfaçam à equação característica e que, consequentemente, determinarão as soluções da E.D. linear reduzida. Considerando-se que a equação algébrica de grau n, (VII.4.3), tem, em geral, n raízes diferentes (m_1, m_2, m_3, ...m_n) as soluções da equação (VII.4.1) serão:

$$y_1 = e^{m_1 x}\ ;\ y_2 = e^{m_2 x};\ \ldots.\ y_n = e^{m_n x}.$$

Evidencia-se que, qualquer uma destas soluções satisfaz a equação (VII.4.1). Igualmente, conforme será visto a seguir, qualquer combinação linear entre as soluções é, também, uma solução da E.D. (VII.4.1). Assim, por exemplo, fazendo-se

$$\eta = C_1\, y_1 + C_2\, y_2, \qquad (C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes})$$

e, subsitutuindo-se η por y, o primeiro membro da equação reduzida (VII.4.1) fica:

$$\frac{d^n}{dx^n}\,\eta + a_{n-1}\,\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}} + \ldots..+ a_1\,\frac{d\eta}{dx}\quad a_0\,\eta = C_1\Big(\frac{d^n y_1}{dx_1{}^n} + a_{n-1}\,\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \ldots$$

$$\ldots + a_1\frac{dy_1}{dx} + a_0\;y_1\Big) + C_2\Big(\frac{d^n y_2}{dx^n} + a_{n-1}\,\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-2}} + \ldots + a_1\,\frac{dy_2}{dx} + a_0\,y_2\Big)$$

Nesta expressão, deve-se observar que, sendo y_1 e y_2 duas soluções da equação (VII.4.1), é considerando-se que $C_1 \neq 0$ e $C_2 \neq 0$, as expressões entre parentêses são identicamente nulas, de onde vem que:

$$\frac{d^n\eta}{dx^n} + a_{n-1}\,\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}} + \ldots. + a_1\,\frac{d\eta}{dx} + a_0\,\eta = 0.$$

Este resultado implica em que a função $\eta = C_1y_1 + C_2y_2$, é, também, solução da E.D. (VII.4.1). De uma maneira geral, pode-se ver que a função, que resulta da combinação linear de todas as soluções y_k, é também uma solução da equação reduzida, i.e.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots\ldots + C_n y_n = \left\{\begin{matrix}\text{Solução da E.D}\\ \text{linear reduzida}\end{matrix}\right\} \qquad \text{(VII.4.4)}$$

Portanto, a solução geral da E.D. reduzida é

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots\ldots + C_n e^{m_n x}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k e^{m_k x} . \qquad \text{(VII.4.5)}$$

É interessante notar a semelhança existente entre a expressão da solução geral (VII.4.5) da equação reduzida, e a definição de um espaço vetorial linearmente independente, dada mediante a equação (2.8) do Capítulo II. Deste ponto de vista, as soluções da E.D. linear reduzida formam um espaço vetorial linearmente independente, já que, *não existe* uma equação do tipo:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots\ldots + C_n y_n = 0 \qquad \text{(VII.4.6)}$$

exceto o caso trivial $C_1 = C_2 = \ldots. C_n = 0$.

É instrutivo considerar o caso em que o espaço vetorial, formado pelas soluções, não seja linearmente independente. Desta maneira, suponha-se que a equação (VII.4.6) seja válida. Isto é, uma solução qualquer é obtida de uma combinação linear das restantes. Com esta suposição, a relação (VII.4.6), juntamente com as suas n-1 derivadas, formam o sistema:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \, y_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \, y'_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \, y''_k = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \, y_k^{(n-1)} = 0.$$

Este conjunto de equações representa um sistema de equações algébricas, onde os parâmetros desconhecidos são os coeficientes C_k. Assim, este sistema pode ser escrito, também, na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n-1)} & y^{(n-1)} & & y^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = 0$$

Evidentemente, este sistema terá soluções não triviais, somente quando o determinante do sistema for nulo. Assim.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1 \cdots\cdots & y_n \\ y_1^1 & y_2^1 \cdots\cdots & y_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

É importante lembrar que esta condição, assim obtida, garante que as soluções y_k, não sejam linearmente independente. Assim, este mesmo resultado pode ser, alternativamente, interpretado de uma maneira mais conveniente. A condição para que as soluções da E.D. (VII.4.1), formem um espaço vetorial de funções linearmente independentes (i.e.,um conjunto de soluções todas diferentes) é que

$$W(y_1,\ y_2,\ldots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \cdots\cdots & y_n \\ y_2^1 & y_2^1 \cdots\cdots & y_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{(VII.4.7)}$$

onde o determinante é conhecido pelo nome de *Wrcnskiano da E.D. reduzida*, comumente designado por $W(y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots\ y_n)$. Acontece que esta condição é também válida para o caso das E.Ds. lineares com coeficientes variáveis, conforme pode-se inferir do procedimento seguido.

Agora, retorna-se à discussão das soluções da equação reduzida. Um problema que não foi considerado, na dedução da solução geral (VII.4.5), é quando duas, ou mais, raízes da equação característica são iguais; em outras palavras, quando a equação (VII.4.3) tem raízes múltiplas (e.g. $m_1 = m_2 = m_3$) Neste caso, é evidente que, o número de soluções diferentes é menor que o número de soluções esperadas, que, por sinal, corresponde à ordem da E.D.. Assim, por exemplo, se $m_1 = m_2$, e este fato fosse substituido diretamente na solução geral (VII.4.5), ter-se-ia que

$$y = (C_1 + C_2)\, e^{m_1 x} + \sum_{k=3}^{n} C_k\, e^{m_k x}.$$

Entretanto, observa-se que esta relação representa apenas n-1 soluções diferentes. Desta maneira, pode-se dizer que se está "perdendo" uma solução. Assim, o próximo objetivo é encontrar a solução em falta, solução esta que deve estar relacionada de alguma maneira, à $y_1 = e^{m_1 x}$. Em vista disto, tentar-se-á encontrar uma solução do tipo

$$y_2(x) = \lambda(x)\, y_1(x), \qquad \text{(VII.4.8)}$$

onde, $\lambda(x)$ é uma função a ser determinada.

Agora, a equação característica, em função de suas raízes, pode ser colocada na forma

$$(m - m_1)^2\, (m - m_3)\, (m - m_4)\, (\ldots\ldots\ldots)\, (m - m_n) = 0 \quad \text{(VII.4.9)}$$

de onde vem que

$$(m - m_1)^2 = m^2 - 2\, m_1 m + m_1^2 = 0. \qquad \text{(VII.4.9)}$$

Esta relação comparada com a (VII.4.3), representa a equação caracteristica da E.D. seguinte:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\,m_1 \frac{dy}{dx} + m^2\, y = 0 \qquad \text{(VII.4.10)}$$

Evidentemente, uma das soluções desta equação é $y_1(x)$, e a outra solução procurada, conforme apresentado anteriormente, é suposta ser da forma $y_2 = \lambda(x)\, y_1(x)$. Substituindo-se (VII.4.8), nesta E.D., e considerando-se que

$$y_2' = \lambda'\, y_1 + \lambda\, y_1 \quad \text{e} \quad y_2'' = \lambda''\, y_1 + 2\lambda'\, y_1' + \lambda\, y_1'' ,$$

tem-se a equação:

$$(y_1'' - 2m_1 y_1' + m_1^2\; y_1)\, \lambda + 2(y_1' - m_1\, y_1)\, \lambda' + y_1\, \lambda'' = 0 .$$

O parênteses do primeiro termo é identicamente nulo devido a (VII.4.10). Logo, a expressão resultante é:

$$y_1 \frac{d\lambda'}{dx} + 2(y_1' - m_1\, y_1)\, \lambda' = 0.$$

Esta equação pode ser simplificada ainda mais, lembrando-se que $y_1 = e^{m_1 x}$ e $y_1' = m_1\, e^{m_1 x}$. Assim,

$$\frac{d\lambda'}{dx} = 0$$

de onde se tem que $\lambda(x)$ é da forma:

$$\lambda(x) = x$$

(As constantes de integração são irrelevantes neste ponto, uma vez que todas estas constantes são absorvidas pelas constantes da solução geral da E.D.).

Por conseguinte, a solução procurada é:

$$y_2(x) = x\, y_1(x) = x\, e^{m_1 x}. \qquad \text{(VII.4.11)}$$

De uma maneira semelhante, pode-se demonstrar que, para o caso de raízes triplas, a "terceira" solução procurada (a segunda é sempre dada pela equação (VII.4.11)), é

$$y_3(x) = x^2\, e^{m_1 x}\ .$$

Portanto, a solução geral para a E.D. reduzida, cuja equação característica possui raízes múltiplas de terceiro grau é:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^{m_1 x} + \sum_{k=4}^{n} C_k\, e^{m_k x}$$

Em geral, se a equação característica apresenta raízes múltiplas de grau r, a solução geral da E.D. reduzida, é dada por:

$$y(x) = e^{m_1 x} \sum_{k=1}^{r} C_k\, x^{k-1} + \sum_{k=r+1}^{n} C_k\, e^{m_k x}. \qquad \text{(VII.4.13)}$$

EXEMPLO 7.23

$$y'' + y = 0$$

A equação característica, para este caso, é:

$$m^2 + 1 = 0$$

de onde

$$m = \pm\, i.$$

Logo, a solução fica

$$y = C_1\, e^{ix} + C_2\, e^{-ix} = (C_1 + C_2) \cos x + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen} x.$$

Chamando-se

$$A = C_1 + C_2 \quad \text{e} \quad B = i(C_1 - C_2).$$

a solução é

$$y = A \cos x + B \operatorname{sen} x$$

EXEMPLO 7.24

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 = 0.$$

Para este caso a solução é

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^x$$

7.4.2 - Método dos Coeficientes Indeterminados

Conforme foi visto, a solução da equação reduzida é obtida de uma maneira muito simples. O verdadeiro problema na solução de uma E.D. linear com coeficientes constante, é a solução geral da equação completa, cuja forma geral é:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = F(x) \qquad \text{(VII.4.14)}$$

Suponha-se que

$$y_{h}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\, e^{m_k x}$$

representa a solução da parte reduzida da equação (VII.4.14)(i.e.$y_{h}(x)$ é a solução de (VII.4.14) quando $F(x) = 0$, e que $y_p = u(x)$ seja uma solução, qualquer, da E.D. linear completa (VII.4.14) então,conforme será demonstrado logo mais, a função

$$y(x) = y_{h}(x) + y_p(x) \qquad \text{(VII.4.15)}$$

representa a solução geral da equação (VII.4.14). A função $y_{h}(x)$ é chamada de *solução complementar*, ou, também de integral complementar. A solução y_p, que satisfaz a E.D. linear completa, é chamada de *solução particular* ou, também, de integral particular, devido a esta solução não envolver constantes de integração. Todas as constantes de integração da solução geral encontram-se incluídas na solução complementar.

Visando provar que a função y(x) definida por (VII.4.15) é, de fato a solução geral da equação (VII.4.14), chama-se de M o operador diferencial linear

$$M = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1\frac{d}{dx} + a_0,$$

tal que,

$$My = F(x) \qquad \text{(VII.4.16)}$$

Sendo y_h e y_p as soluções complementar e particular, respectivamente, é evidente que,

$$My_h = 0$$

$$My_p = F(x)$$

Fazendo atuar o operador diferencial M sobre a função (VII.4.15), tem-se

$$My = M(y_h + y_p) = My_h + My_p = 0 + F(x).$$

Assim, uma vez que a função $y = y_h + y_p$ satisfaz à equação (VII.4.14), esta função representa a solução geral da E.D. linear (VII.4.14). Desta maneira, e já que a solução complementar pode ser obtida da forma elementar descrita na subseção 7.4.1. o problema de encontrar a solução geral da E.D. (VII.4.14) reduz-se a encontrar a solução particular $y_p(x)$.

Um dos métodos mais conhecidos para a determinação de $y_p(x)$ é o chamado *Método dos Coeficientes Indeterminados*. Em linhas gerais, este método consiste em escolher, para $y_p(x)$, uma função que seja a combinação linear das funções elementares, que fazem parte de $F(x)$, e de suas derivadas. Os coeficientes desta combinação linear são os coeficientes a serem determinados mediante, primeiro, a substituição desta função escolhida para y_p, na E.D. completa, e logo, por comparação de ambos os membros, são identificados os valores dos coeficientes.

Na prática surgem alguns inconvenientes, neste método, quando F(x) contém termos que, ao mesmo tempo, são soluções da parte reduzida da E.D., conforme poderá ser apreciada nos exemplos que serão dados. Quando F(x), ou cada um dos seus termos, corresponde à seguinte forma generalizada:

$$F(x) = e^{\lambda x}\left[\cos\alpha x \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}\, x^{n-k} + \operatorname{sen}\alpha x \sum_{k=0}^{q} B_{q-k}\, x^{q-k}\right] \qquad \text{(VII.4.17)}$$

a função que resulta da combinação linear de cada um dos termos de de (VII.4.17) e de suas derivadas, é a solução particular (exceto pelos coeficientes indeterminados). Esta função é da seguinte forma:

$$y_p(x) = x^s\, e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{P} x^k\,(M_k \cos\alpha x + N_k \operatorname{sen}\alpha x) \qquad \text{(VII.4.18)}$$

onde, M_k e N_k são os coeficientes a serem determinados, P é a maior potência de x entre n e q em F(x), λ e α são os mesmos (números ou parâmetros) indicados em F(x), e s é uma potência cujo valor numérico depende da forma de F(x), da relação existente entre os termos contidos em (VII.4.17) e das equações da parte reduzida (solução complementar) da equação. Assim, quando em F(x), não existem potências de x, i.e.

$$F(x) = e^{\lambda x}\,(A\cos\alpha x + B \operatorname{sen}\alpha x),$$

então,

$$s = 0.$$

O índice s também possui este mesmo valor ($s = 0$), quando nenhum dos termos de (VII.4.18) for qualquer uma das soluções da parte reduzida. Entretanto, quando ocorre o contrário (isto é, um dos termos de $F(x)$ é também solução da parte reduzida), caso que pode ser identificado mediante as raízes da equação característica

$$m = 0, \quad \text{ou} \quad m = \lambda, \quad \text{ou} \quad m = \pm i\alpha,$$

então, o valor numérico de s é igual ao grau de multiplicidade das raízes da equação característica. Assim:

Se as raízes são simples (valores diferentes), então: $s = 1$.

Se as raízes são duplas (duas delas iguais) então $s = 2$.

etc.

A demonstração de que (VII.4.18) é a combinação linear de (VII.4.17) e suas derivadas, para o caso $s = 0$, é relativamente simples. Esta demonstração é deixada para o leitor. Contudo, nos exemplos que se seguem serão dadas demonstrações incluindo os casos para os quais $s \neq 0$.

EXEMPLO 7.25

Seja resolver a E.D.

$$y'' + y = 12\,x^2$$

Do exemplo 7.23, sabe-se que

$$y_h = A \cos x + B \operatorname{sen} x.$$

Torna-se evidente que, neste caso, nenhuma das soluções da parte reduzida pode ser identificada com $F(x) = 12x^2$. Logo, $u(x)$ deverá ser uma combinação linear de $F(x) \propto x^2$, $F'(x) \propto x$ e $F''(x) \propto$ constante.

$$y_p = M_0 + M_1 x + M_2 x^2.$$

(Note-se que esta mesma função é obtida de (VII.4.18), observando-se que $s = 0$, $\lambda = 0$ e $P = 2$). Substituindo-se esta função na E.D., tem-se que:

$$2M_2 + M_0 + M_1 x + M_2 x^2 = 12x^2 .$$

Esta relação chega a ser uma identidade, unicamente, quanto os coeficientes das mesmas potências de x, em ambos os membros, forem iguais. Isto é,

$$M_2 = 12$$

$$M_1 = 0$$

$$2M_2 + M_0 = 0 \quad \text{de onde} \quad M_0 = - 24.$$

Logo, a solução geral da E.D. proposta, é:

$$y(x) = y_h + y_p = A \cos x + B \operatorname{sen} x + 12 x^2 - 24$$

<u>EXEMPLO 7.26</u>

$$y'' + 3y' = \operatorname{sen} x + 2 \cos x.$$

Pode-se verificar que

$$y_h = C_1 + C_2 \, e^{-3x} \, .$$

Neste caso, uma das raízes da equação característica é nula, fato que sugeriria s = 1. Porém, dado que não existem potências de x em $F(x) = \operatorname{sen} x + 2 \cos x$, segue-se que s = 0. Isto é obvio uma vez que nenhum dos termos de F(x) é identificado com as soluções da parte reduzida. Portanto, a solução particular será da seguinte forma:

$$y_p = M_0 \cos x + N_0 \operatorname{sen} x.$$

É evidente que este resultado é apenas a combinação linear de $F(x) = \operatorname{sen} x + 2 \cos x$, e suas derivadas. Substituindo-se y_p na E.D., e igualando-se os coeficientes em ambos os membros, tem-se:

$$M_0 = \frac{1}{2} \, , \quad N_0 = \frac{1}{2} \quad .$$

Desta maneira, a solução geral da E.D., é:

$$y(x) = C_1 + C_2\, e^{-3x} + \frac{1}{2}\,(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

EXEMPLO 7.27

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$$

$$y_h = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{-x}$$

Observe-se que, neste caso, a solução e^{-2x} é a mesma função $F(x) = e^{-2x}$. (Se se escolher $y_p = M_0\, e^{-2x}$ conforme seria o caso normalmente aconselhável, a substituição desta função na E.D., levaria ao resultado $M_0 = 0$). Como consequência, pode-se dizer que se tem um problema análogo ao caso de raízes múltiplas da equação reduzida. Em outras palavras, o problema consiste em encontrar uma outra solução (na realidade, uma solução particular) que, de alguma maneira, esteja relacionada à e^{-2x}.

A solução, neste caso também é enfrentada da mesma maneira que para o caso da equação reduzida, isto é, procura-se uma solução do tipo

$$y_p = v(x)\, e^{-2x} .$$

Substituindo-se y_p na E.D., obtém-se:

$$v'' - v' = 1.$$

Esta é outra equação de segunda ordem, porém, redutível a outra de primeira ordem. Fazendo-se $v' = p$ e $v'' = p'$, a E.D. anterior fica

$$p' - p = 1,$$

equação que é identificada como uma linear de primeira ordem, cuja solução foi estabelecida na equação (VII.2.13)

$$p = v' = e^{x} \left[\int e^{-x}\, dx + C \right]$$

de onde,

$$v(x) = C\, e^{x} - x.$$

Portanto, a solução particular fica

$$y_p = C\, e^{-x} - x\, e^{-2x}\ .$$

Observe-se que, a contribuição real desta solução, é representada pelo segundo termo $-x\, e^{-2x}$, já que o primeiro é essencialmente uma das soluções da equação reduzida. Seguindo-se uma análise parecida, pode-se demonstrar que, quando $\alpha = 0$ e $P = 0$ nas relações

(VII.4.17) e (VII.4.18), e as raízes da equação característica são simples, então s = 1. Desta maneira, justifica-se a forma genérica da solução particular (VII.4.18), quando F(x) apresenta a forma (VII.4.18).

Voltando-se a E.D, do exemplo, vê-se que a solução geral é:

$$y(x) = C_2\, e^{-x} + (C_1 - x)\, e^{-2x}$$

EXEMPLO 7.28

$$y''' - y' = 2 - x + 3 \cos x - 4\, e^{-x} .$$

Verifica-se que

$$y_h = C_1 + C_2\, e^{x} + C_3\, e^{-x}$$

Observe-se que, nesta solução complementar, se tem soluções que, ao mesmo tempo são funções elementos de F(x) i.e. o tempo independente e a função e^{-x}. Portanto, a solução particular, de acordo com (VII.4.18), deve ser da forma:

$$y_p = (M_1\, x + M_0)\, x + (M_2 \cos x + M_3 \operatorname{sen} x) + M_4\, x\, e^{-x},$$

onde foram agrupados os termos que se espera serem soluções particulares dos correspondentes da E.D. do exemplo. Substituindo-se y_p na E.D. determinam-se os coeficientes

$$M_1 = \frac{1}{2}, \quad M_0 = -2, \quad M_3 = -\frac{3}{2}, \quad M_2 = 0, \quad M_4 = -2.$$

A solução geral é:

$$y = C_1 + C_2\, e^{x} + C_3\, e^{-x} + \frac{x}{2}(x - 4) - \frac{3}{2}\,\text{sen}\, x - 2\, x\, e^{-x}$$

<u>EXEMPLO 7.29</u>

$$y''' + 3\, y'' + y' + 3y = e^{-3x} \cos x$$

$$y_h = C_1\, e^{-3x} + C_2 \cos x + C_3\, \text{sen}\, x\,.$$

Neste caso, as funções e^{-3x} e $\cos x$ de $F(x)$ são também soluções da parte reduzida, porém, o termo $e^{-3x}\cos x$, não o é. Portanto, a solução complementar, para este caso, é do tipo

$$y_p = e^{-3x}\,(M \cos x + N\, \text{sen}\, x)$$

Substituindo-se y_p na E.D., e igualando-se os coeficientes das mesmas funções em ambos os membros, são determinados os coeficientes M e N.

$$M = \frac{2}{39}, \quad N = \frac{1}{13}.$$

Assim, a solução geral da E.D. é:

$$y(x) = C_1\, e^{-3x} + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x + \frac{1}{13}\left(\frac{2}{3} \cos x + \operatorname{sen} x\right) e^{-3x}$$

7.4.3 - Método dos Operadores

O método dos coeficientes indeterminados, pode apresentar certas dificuldades quando a função F(x), da equação completa (VII.4.14), possui propriedades peculiares. Um método de integração da equação completa (VII.4.14), que apenas depende da habilidade de efetuar integrações, é o chamado *Método dos Operadores*.

Define-se o operador diferencial $\mathcal{D}$, tal que, atuando sobre uma função f(x) se tem como resultado a derivada desta função. Assim,

$$\mathcal{D}\, f(x) = \frac{d}{dx}\, f(x).$$

Pode-se provar que este operador é um operador linear.

Da aplicação sucessiva de $\mathcal{D}$ sobre uma mesma função y, tem-se os seguintes resultados:

$$\mathcal{D} y = \frac{dy}{dx}$$

$$\mathcal{D}\mathcal{D} y = \mathcal{D}^2 y = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} .$$

Assim, em geral:

$$\mathcal{D}^n y = \frac{d^n y}{dx^n} .$$

Com esta definição, a E.D. linear com coeficientes constantes (VII.4.14) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{D}^n y + a_{n-1} \mathcal{D}^{n-1} y + \ldots + a_1 \mathcal{D} y + a_0 y = F(x),$$

ou, também,

$$(\mathcal{D}^n + a_{n-1} \mathcal{D}^{n-1} + \ldots + a_1 \mathcal{D} + a_0)y = F(x). \qquad \text{(VII.4.19)}$$

A expressão entre parênteses (polinômio) é um operador diferencial, o qual pode, também, ser escrito na forma

$$(\mathcal{D} - m_1)\ (\mathcal{D} - m_2)\ (\ldots\ldots\ldots)\ (\mathcal{D} - m_n)y = F(x), \qquad \text{(VII.4.20)}$$

onde se deve notar que os parâmetros m_1, m_2, etc, são exatamente as raízes da equação característica (VII.4.3). A equação (VII.4.20) pode ser escrita, simbolicamente na forma:

$$y(x) = \left[\frac{1}{(\mathcal{D} - m_1)\ (\mathcal{D} - m_2)\ (\ldots\ldots.)\ (\mathcal{D} - m_n)}\right] F(x) \qquad \text{(VII.4.21)}$$

Esta maneira de colocar o operador diferencial (polinômio) no denominador do segundo membro é equivalente a definir o *"inverso" do operador diferencial,* expresso em forma de polinômio. É interessante notar que se, de alguma maneira, se pudesse achar algum método de calcular o operador inverso (que necessariamente terá que envolver integrações), a equação (VII.4.21) representaria a solução da E.D. linear (VII.4.19)

7.4.3.1 - Caso em que as Raízes da Equação Características são Simples

Separando-se o operador diferencial inverso em frações parciais, e supondo que todas as raizes m_n, da equação característica, sejam diferentes, tem-se que

$$y(x) = \left(\frac{A_1}{\mathcal{D} - m_1} + \frac{A_2}{\mathcal{D} - m_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{\mathcal{D} - m_n}\right) F(x)$$

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \left(\frac{1}{\mathcal{D} - m_k}\right) F(x) \qquad \text{(VII.4.22)}$$

Nesta última expressão tem-se operadores diferenciais inversos mais simples. Certamente, este é o ponto apropriado para se estudar a natureza destes operadores diferenciais inversos. Para isto considera-se a equação

$$(\mathcal{D} - m)\ \eta = g(x) \tag{VII.4.23}$$

ou

$$\eta' - m\eta = g(x)$$

Esta última expressão é uma equação linear de primeira ordem, cuja solução geral é dada pela relação (VII.2.13)

$$\eta = e^{+\int m dx} \left[\int g(x)\ e^{-\int m dx}\ dx + C \right]$$

$$\eta = e^{mx} \left[\int e^{-mx}\ g(x)\ dx + C \right] \tag{VII.4.24}$$

Por outro lado, multiplicando-se (VII.4.23) pelo operador inverso $\dfrac{1}{\mathcal{D} - m}$, tem-se que

$$\eta = \left(\frac{1}{\mathcal{D} - m} \right) g(x) \tag{VII.4.25}$$

A comparação das relações (VII.4.24) e (VII.4.25) revela a natureza do operador diferencial inverso $\dfrac{1}{\mathcal{D} - m}$, ao atuar sobre a função g(x). Assim, observa-se que,

$$\left(\frac{1}{\mathcal{D} - m} \right) g(x) = e^{mx} \left[\int e^{-mx}\ g(x)\ dx + C \right] \tag{VII.4.26}$$

de onde se segue que, conforme deveria se esperar, o operador diferencial inverso é um *operador integral* que, aliás, é a solução de uma E.D. linear de primeira ordem.

Com os resultados desta análise, retorna-se a equação (VII.4.22), onde, exceto pelos coeficientes A_k, cada termo é substituído por uma relação da forma (VII.4.26). Observa-se que isto equivale a ter a soma de n soluções de E.Ds. lineares de primeira ordem. Em outras palavras, a E.D. linear de ordem n foi convertida em n E.Ds. de primeira ordem, i.e.:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \, e^{m_k x} \left[\int e^{-m_k x} F(x)\, dx + C_k \right], \qquad \text{(VII.4.27)}$$

onde as n constantes C_k são as constantes de integração, e os coeficientes A_k vêm da separação em frações parciais. Ressalta-se que, esta expressão representa a solução geral da E.D. linear com coeficientes constantes.

Este método apresenta a vantagem, sobre o método dos coeficientes indeterminados, de não depender de uma "boa escolha" para a solução particular. Contudo, o método dos operadores, quando F(x) é uma função simples, ou contemplada dentro do tipo de funções (VII.4.17), é um pouco mais trabalhoso que o método dos coeficientes indeterminados.

EXEMPLO 7.30

Seja a equação diferencial:

$$y'' + 2y' = 6 + 8x,$$

onde as raízes da equação característica são respectivamente, $m_1 = 0$ e $m_2 = -2$.

A equação (VII.4.19), para este caso, fica

$$(\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D})y = 6 + 8x$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{D} + 2)y = 6 + 8x$$

$$y = \left[\frac{1}{\mathcal{D}(\mathcal{D}+2)}\right](6 + 8x).$$

Separando-se o operador diferencial inverso, em frações parciais, tem-se:

$$\frac{1}{\mathcal{D}(\mathcal{D}+2)} = \frac{A_1}{\mathcal{D}} + \frac{A_2}{\mathcal{D}+2},$$

de onde

$$A_1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad A_2 = -\frac{1}{2}.$$

Logo,

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mathcal{D}} \right) (6 + 8x) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mathcal{D} + 2} \right) (6 + 8x).$$

A solução, para este caso, é dada por (VII.4.27):

$$y = \frac{1}{2} \left[\int (6 + 8x)\, dx + C_1 \right] - \frac{1}{2}\, e^{-2x} \left[\int e^{2x} (6 + 8x)\, dx + C_2 \right]$$

$$= 3x + 2x^2 + \frac{1}{2} C_1 - e^{-2x} \int e^{-2x} (3 + 4x)\, dx - \frac{1}{2} C_2\, e^{-2x}$$

$$= 3x + 2x^2 + \frac{1}{2} C_1 - \frac{3}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} C_2\, e^{-2x}.$$

Agrupando-se todos os termos constantes, a solução fica:

$$y = B_1 + B_2\, e^{-2x} + x(1 + 2x).$$

EXEMPLO 7.31

Outro exemplo, para efeito comparativo entre o método de coeficientes indeterminados e o dos operadores é o proposto no Exemplo 7.28, onde a integral particular demandou uma atenção especial:

$$y''' - y' = 2 - x + 3 \cos x - 4\, e^{-x} .$$

Chamando-se

$$F(x) = 2 - x + 3\cos x - 4e^{-x},$$

a E.D. fica:

$$(\mathcal{D}^3 - \mathcal{D})y = F(x)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}^2 - 1)\, y = \mathcal{D}(\mathcal{D}+1)\,(\mathcal{D}-1)\,y = F(x)$$

$$y = \left[\frac{1}{\mathcal{D}(\mathcal{D}+1)\,(\mathcal{D}-1)}\right] F(x)\ .$$

Separando-se em frações parciais o operador diferencial inverso, a equação anterior, fica

$$y = -\left(\frac{1}{\mathcal{D}}\right) F(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathcal{D}+1}\right) F(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathcal{D}-1}\right) F(x)$$

Calculando-se cada termo, separadamente, e usando-se a relação (VII.4.26), tem-se:

$$\left(\frac{1}{\mathcal{D}}\right) F(x) = \int (2 - x + 3\cos x\ 4e^{-x})\, dx + C_1$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} + 3\operatorname{sen} x + 4e^{-x} + C_1$$

$$\left(\frac{1}{\mathcal{D}+1}\right) F(x) = e^{-x}\left[\int e^{x}(2 - x + 3\cos x - 4e^{-x})\, dx + C_2\right]$$

$$= 2 - x + 1 + \frac{3}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) - 4x e^{-x} + C_2 e^{-x}$$

$$\left(\frac{1}{\mathcal{D}-1}\right) F(x) = e^{x}\left[\int e^{-x}(2 - x + 3\cos x - 4e^{-x})\, dx + C_3\right]$$

$$= -2 + x + 1 + \frac{3}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + 2e^{-x} + C_3 e^{x} .$$

Assim, a solução, após feitas as simplificações e os agrupamentos convenientes, fica:

$$y(x) = C_1 + C_3 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{3}{2}\operatorname{sen} x - 2x e^{-x}$$

EXEMPLO 7.32

Como último exemplo, seja a E.D.

$$y'' + 3y' + 2y = e^{e^{x}} .$$

Esta equação diferencial é muito difícil de se resolver pelo método dos coeficientes indeterminados, conforme pode-se verificar, devido à forma complicada da função do segundo membro. É neste tipo de E.Ds. que o método dos operadores demonstra sua maior utilidade.

Pode-se ver que,

$$m_1 = -1 \quad ; \quad m_2 = -2.$$

Logo a E.D. fica

$$(\mathcal{D}^2 + 3\mathcal{D} + 2)y = (\mathcal{D} + 1)\ (\mathcal{D} + 2)y = e^{e^x}$$

$$y = \left(\frac{A_1}{\mathcal{D} + 1} + \frac{A_2}{\mathcal{D} + 2}\right) e^{e^x} = A_1\left(\frac{1}{\mathcal{D} + 1}\right) e^{e^x} + A_2\left(\frac{1}{\mathcal{D} + 2}\right) e^{e^x}$$

onde

$$A_1 = 1 \quad \text{e} \quad A_2 = -1.$$

$$\left(\frac{1}{\mathcal{D} + 1}\right) e^{e^x} = e^{-x}\left[\int e^x\, e^{e^x}\, dx + C_1\right] = e^{-x}\ (\, e^{e^x} + C_1\,).$$

Nesta última expressão, fez-se a identificação

$$\frac{d}{dx}\ e^{e^x} = e^x\ e^{e^x}.$$

Analogamente,

$$\left(\frac{1}{\mathcal{D} + 2}\right) e^{e^x} = e^{-2x}\left[\int e^{2x}\, e^{e^x}\, dx + C_2\right] = e^{-2x}\left[e^x\, e^{e^x} - e^{e^x} + C_2\right]$$

A integração anterior foi realizada por partes, chamando-se

$$u = e^{x} \quad e \quad dx = e^{x}\, e^{e^{x}}\, dx = \frac{d}{dx}\left(e^{e^{x}} \right) dx.$$

Assim, a solução da E.D. fica:

$$y = e^{-x}\left(e^{e^{x}} + C_1\right) - e^{-2x}\left(e^{x} - 1\right) e^{e^{x}} - C_2\, e^{-2x}$$

$$y = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{-2x} + e^{-2x}\, e^{e^{x}} .$$

7.4.3.2 - Caso em que as Raízes da Equação Característica são Múltiplas

O método dos operadores, da forma exposta anteriormente, apresenta dificuldade quando as raízes da equação característica são múltiplas, já que não é mais possível se obter a separação, em frações parciais do operador diferencial inverso, que, apresenta a multiplicidade das raízes. Para estes casos, e supondo-se que duas das raízes sejam iguais ($m_1 = m_2$) a equação (VII.4.20), fica

$$(\mathcal{D} - m_1)^2\, (\mathcal{D} - m_3)\, (\ldots\ldots.)\, (\mathcal{D} - m_n)y = F(x) \qquad \text{(VII.4.28)}$$

Multiplicando-se ambos os membros pelo operador diferencial inverso, $\dfrac{1}{\mathcal{D} - m_1}$, tem-se:

$$(\mathcal{D} - m_1)\ (\mathcal{D} - m_3)\ (\ldots\ldots.)\ (\mathcal{D} - m_n)\, y = \left(\frac{1}{\mathcal{D} - m_1}\right) F(x).$$

Porém,

$$\left(\frac{1}{\mathcal{D} - m_1}\right) F(x) = e^{m_1 x} \left[\int e^{-m_1 x}\, F(x)\, dx + C_1\right] = \Phi(x)\ .$$

Logo, a E.D, restante fica,

$$(\mathcal{D} - m_1)\ (\mathcal{D} - m_3)\ (\ldots\ldots)\ (\mathcal{D} - m_n) y = \Phi(x)\ ; \qquad \text{(VII.4.29)}$$

caindo, outra vez, no caso das raízes simples. Para o caso de três, ou mais, raízes iguais, o procedimento pode ser repetido até se obter uma E.D. de raízes simples. Alias, este procedimento de integração pode ser continuado, inclusive com os fatores de raízes simples, até se chegar à solução geral da E.D.

<u>EXEMPLO 7.33</u>

$$y''' + y'' - y' - y = e^{-x}\ \text{sen}\, 2x.$$

A equação característica, é:

$$m^3 + m^2 - m - 1 = (m + 1)^2\ (m - 1) = 0.$$

Logo, a E.D. fica

$$(\mathcal{D} + 1)^2 \ (\mathcal{D} - 1)\, y = e^{-x} \ \text{sen}\, 2x$$

$$(\mathcal{D} + 1) \ (\mathcal{D} - 1)\, y = \left(\frac{1}{\mathcal{D} + 1} \right) e^{-x} \ \text{sen}\, 2x$$

Por outro lado,

$$\left(\frac{1}{\mathcal{D} + 1} \right) e^{-x} \ \text{sen}\, 2x = e^{-x} \left[\int e^{x} e^{-x} \ \text{sen}\, 2x \, dx + C_1 \right]$$

$$= e^{-x} \left[C_1 - \frac{1}{2} \cos 2x \right].$$

Assim, a nova E.D. fica

$$(\mathcal{D} + 1) \ (\mathcal{D} - 1)\, y = e^{-x} \left(C_1 - \frac{1}{2} \cos 2x \right)$$

$$(\mathcal{D} - 1)\, y = \left(\frac{1}{\mathcal{D} + 1} \right) e^{-x} \left(C_1 - \frac{1}{2} \cos 2x \right) = e^{-x} \left[\int \left(C_1 - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx + C_1 \right]$$

$$(\mathcal{D} - 1)y = e^{-x} \left[\left(C_1 x - \frac{1}{4} \ \text{sen}\, 2x \right) + C_2 \right].$$

Finalmente,

$$y = \left(\frac{1}{\mathcal{D}-1}\right) e^{-x} \left(C_2 + C_1 x - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x\right) = e^{-x}\left[\int e^{-2x}\left(C_2 + C_1 x - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x\right) + C_3\right]$$

$$= e^{x}\left[-C_2\frac{e^{-2x}}{2} + C_1\frac{e^{-2x}}{4}(-2x-1) - \frac{e^{-2x}}{4\times 8}(-2\,\text{sen}\,2x - 2\cos 2x) + C_3\right].$$

$$y = A\,e^{x} + (B + Dx)\,e^{-x} + \frac{1}{16}(\text{sen}\,2x + \cos 2x)\,e^{-x},$$

onde, todos os coeficientes constantes foram agrupados em A, B e D.

7.4.4 - Método de Variação de Parâmetros

O método de resolução de uma E.D. linear completa, descrito a seguir, é de aplicação geral, incluindo as E.Ds. com coeficientes variáveis. Contudo, neste método é necessário que as soluções da equação reduzida sejam conhecidas. Esta restrição não representa nehuma dificuldade para as E.Ds. lineares com coeficientes constantes, conforme já foi visto. Quanto à solução da parte reduzida das E.Ds com coeficientes variáveis, esta será tratado no restante deste Capítulo. Por enquanto, supor-se-á que as soluções da parte reduzida da E.D. linear são conhecidas.

Visando-se simplificações nas análises e especialmente, porque o tipo mais comum de E.D. que aparece em problemas físicos é de segunda ordem, considere-se a equação:

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = F(x). \qquad \text{(VII.4.30)}$$

Suponha-se que $y_{c1}(x)$ e $y_{c2}(x)$ sejam duas soluções independentes da equação reduzida, tal que

$$y''_{cj} + P(x)\,y'_{cj} + Q(x)\,y_{cj} = 0 \qquad \text{(VII.4.31)}$$

Assim, a solução geral da parte reduzida da E.D.(VII.4.30) é:

$$y_c = A\,y_{c1} + B\,y_{c2}.$$

Com base nesta solução, procura-se encontrar a solução geral da E.D. completa (VII.4.30) de maneira que seja, também uma combinação, embora não linear, das funções y_{cj}. Assim, procuram-se soluções do tipo:

$$y = A(x)\,y_{c1}(x) + B(x)\,y_{c2}(x), \qquad \text{(VII.4.32)}$$

onde A(x) e B(x) são funções a serem determinadas. Derivando-se(VII.4.32), tem-se

$$y' = A\,y'_{c1} + B\,y'_{c2} + A'\,y_{c1} + B'\,y_{c2}.$$

As funções A(x) e B(x), que até aqui foram consideradas arbitrárias, ficam completamente determinadas com a condição, imposta convenientemente,

$$A'\, y_{c1} + B'\, y_{c2} = 0, \tag{VII.4.33}$$

condição esta que também implica que

$$y' = A\, y'_{c1} + B\, y'_{c2}\,.$$

Derivando-se, mais uma vez, esta expressão, tem-se que:

$$y'' = A\, y''_{c1} + B\, y''_{c2} + A'\, y'_{c1} + B'\, y'_{c2}.$$

Substituindo-se esta últimas expressões na (VII.4.30) e rearranjando os termos, tem-se:

$$A(y''_{c1} + P\, y'_{c1} + Q\, y_{c1}) + B(y''_{c2} + P\, y'_{c2} + Q\, y_{c2}) + A'\, y'_{c1} + B' y'_{c2} = F(x)$$

Observe-se que, as expressões entre parênteses, são identicamente nulas, devido, ã (VII.4.31).

Portanto, a equação anterior fica

$$A'\, y'_{c1} + B'\, y'_{c2} = F(x) \tag{VII.4.34}$$

As equações (VII.4.33) e (VII.4.34) formam um sistema algébrico de equações nas funções A'(x) e B'(x). A solução deste sistema ē a seguinte:

$$\frac{d}{dx}A(x) = \frac{-F(x)\,y_{c2}}{y_{c1}\,y'_{c2} - y'_{c1}\,y_{c2}}\,,\quad \frac{d}{dx}B(x) = \frac{F(x)\,y_{c1}}{y_{c1}\,y'_{c2} - y'_{c1}\,y_{c2}} \qquad \text{(VII.4.35)}$$

Evidencia-se que estas soluções existirão, unicamente, quando

$$y_{c1}\,y'_{c2} - y'_{c1}\,y_{c2} \neq 0.$$

Esta condição nada mais é do que o Wronskiano das soluções da parte reduzida da E.D (VII.4.30) e que exprime a independência linear entre estas soluções, de acordo com discussão exposta na subseção 7.4.1.

Integrando-se as duas relações (VII.4.35), e chamando-se $W(y_{c1}, y_{c2}) = y_{c1}\,y'_{c2} - y'_{c1}\,y_{c2}$, tem-se que

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= -\int \frac{y_{c2}(x)\;F(x)}{W(y_{c1}\,,y_{c2})}\,dx + C_1 \\ B(x) &= \int \frac{y_{c1}(x)\;F(x)}{W(y_{c1}\,,y_{c2})}\,dx + C_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.4.36)}$$

onde, as constantes C_1 e C_2 são as constantes de integração da E.D.. Com esses resultados, a integração da E.D. (VII.4.30) fica definida mediante a relação (VII.4.32).

O procedimento para a integração de E.Ds. lineares de terceira ordem da forma (VII.4.30), supondo-se conhecidas as soluções da equação reduzida, é essencialmente o mesmo. Isto é,

$$y(x) = A(x)\, y_{c1}(x) + B(x)\, y_{c2}(x) + D(x)\, y_{c3}(x), \qquad \text{(VII.4.37)}$$

onde, as funções A(x), B(x) e D(x) são escolhidas de maneira que:

$$A'y_{c1} + B'y_{c2} + D'y_{c3} = 0 \qquad \text{(VII.4.38)}$$

e

$$A'y'_{c1} + B'y'_{c2} + D'y'_{c3} = 0 \qquad \text{(VII.4.39)}$$

Estas duas equações, mais a equação que resulta depois de substituir (VII.4.37) na E.D. de terceira ordem, a qual é:

$$A'y''_{c1} + B'y''_{c2} + D'y''_{c3} = F(x), \qquad \text{(VII.4.40)}$$

formam um conjunto de equações algébricas que definem as funções A'(x), B'(x) e D'(x). Integrando-se estas funções (depois de encontradas suas soluções) e substituindo-se os resultados na relação (VII.4.37), obtem-se a solução da E.D. de terceira ordem. Do sistema de equações (VII.4.38), (VII.4.39) e (VII.4.40), fica evidente que as soluções complementarias y_{ci} devem ser tal que:

$$W(y_{c1}, y_{c2}, y_{c3}) \neq 0,$$

isto é, que sejam soluções independentes.

Observando-se a forma do sistema de equações (VII.4.38), (VII.4.39) e (VII.4.40), infere-se que este método é facilmente extensível a E.Ds. lineares de ordem superior.

EXEMPLO 7.34

Seja a mesma E.D, do Exemplo 7.32.

$$y'' + 3y' + 2y = e^{e^{x}}$$

As soluções da parte reduzida da equação, são

$$y_{c1} = e^{-x} \qquad ; \qquad y_{c2} = e^{-2x},$$

de onde,

$$y'_{c1} = - e^{-x} \qquad ; \qquad y'_{c2} = - 2e^{-2x}$$

$$W(y_{c1}, y_{2}) = y_{c1}(x)\, y'_{c2}(x) - y'_{c1}(x)\, y_{c2}(x) = - 2e^{-3x} + e^{-3x} = - e^{-3x} .$$

Logo, as integrais (VII.4.36), com $F(x) = e^{e^{x}}$, ficam

$$A(x) = + \int e^{e^x} e^x \, dx + C_1 = e^{e^x} + C_1$$

$$B(x) = - \int e^{e^x} e^{2x} \, dx + C_2 = -(e^x - 1) \, e^{e^x} + C_2 \, .$$

Portanto, a solução geral da E.D., de acordo com (VII.4.32) é:

$$y(x) = (e^{e^x} + C_1) \, e^{-x} - \left[(e^x - 1) \, e^{e^x} - C_2 \right] e^{-2x}$$

$$y(x) = e^{-2x} \, e^{e^x} + C_1 \, e^{-x} + C_2 \, e^{-2x} \, .$$

<u>EXEMPLO 7.35</u>

$$y''' - 7y'' + 14y' - 8y = x^3 \, e^{-x} \, .$$

A equação característica da parte reduzida da E.D., é

$$m^3 - 7m^2 + 14m - 8 = 0$$

Pode-se ver que $m_1 = 1$ é uma das raízes. Para encontrar as outras raízes, fatora-se o polinômio

$$m^3 - 7 \, m^2 + 14m - 8 = (m - 1) \, (m - m_2) \, (m - m_3) = 0$$

de onde se obtêm as equações:

$$m_2 + m_3 = 6$$

$$m_2 \quad m_3 = 8.$$

Assim, as raízes da equação característica são:

$$m_1 = 1; \; m_2 = m_3 = 4.$$

Portanto, as soluções da parte reduzida da E.D. são:

$$y_{c1} = e^{x} \; ; \; y_{c2} = e^{2x} \; ; \; y_{c3} = e^{4x}.$$

A solução procurada é da forma

$$y = e^{x} A(x) + e^{2x} B(x) + e^{4x} D(x)$$

$$y' = e^{x} A + 2e^{2x} B + 4e^{4x} D + \underbrace{e^{x} A' + e^{2x} B' + e^{4x} B'}_{=0}$$

$$y'' = e^{x} A + 4e^{2x} B + 16e^{4x} D + \underbrace{e^{x} A' + 2e^{2x} B' + 4e^{4x} D'}_{=0}$$

$$y''' = e^{x} A + 8e^{2x} B + 64e^{4x} D + e^{x} A' + 4e^{2x} B' + 16e^{4x} D'.$$

Substituindo-se estas expressões na E.D., pode-se ver que,

$$A(0) + B(0) + D(0) + e^{x} A' + 4e^{2x} B' + 16e^{4x} D' = x^3 e^{-x}.$$

Desta maneira, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$e^{x}A' + e^{2x}B' + e^{4x}D' = 0$$

$$e^{x}A' + 2e^{2x}B' + 4e^{4x}D' = 0$$

$$e^{x}A' + 4e^{2x}B' + 16e^{4x}D' = x^3 e^{-x}.$$

Observe-se que este sistema de equações corresponde às relações (VII.4.38), (VII.4.39) e (VII.4.40).

$$W(e^{x}, e^{2x}, e^{4x}) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & e^{4x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & 4e^{4x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 16e^{4x} \end{vmatrix} = e^{7x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 6\, e^{7x}$$

$$A' = \frac{1}{6e^{7x}} \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{4x} \\ 0 & 2e^{2x} & 4e^{4x} \\ x^3e^{-x} & 4e^{2x} & 16e^{4x} \end{vmatrix} = \frac{x^3e^{-2x}}{6} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\, x^3 e^{-2x}$$

De forma análoga:

$$B' = -\frac{1}{2}\, x^3 e^{-3x} \quad ; \quad D' = \frac{1}{6}\, x^3 e^{-5x}.$$

Portanto, as funções procuradas são obtidas integrando-se esses resultados,

$$A(x) = \frac{1}{3}\int x^3 e^{-2x}\,dx + C_1 = -\frac{1}{6}\,e^{-2x}\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right) + C_1$$

Analogamente,

$$B(x) = \frac{1}{6}\,e^{-3x}\quad x^3 + x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\quad + C_2$$

$$D(x) = -\frac{1}{30}\,e^{-5}\left(x^3 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x + \frac{6}{125}\right) + C_3 .$$

Por último, a solução geral da E.D. proposta fica:

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{4x} - \frac{1}{30}\left(x^3 + \frac{31}{10}x^2 + \frac{761}{1125} + \frac{12091}{4500}\right) e^{-x}$$

7.4.5 - Método das Transformadas Integrais

Dentre as propriedades das transformadas de Fourier, Laplace, Fourier-seno e Fourier-co-seno (ver Capítulo VI), a que merece maior destaque na solução de E.Ds., é a da transformada das derivadas sucessivas de uma função. Isto é evidente, porque mediante esta propriedade é possível converter a derivada, de ordem arbitrária de uma função, num polinômio de potências do parâmetro da transformada integral, onde o coeficiente da maior potência (que é igual à ordem da derivada) é a transformada da função.

É necessário ressaltar que esta propriedade é muito útil apenas quando a derivada se encontra isolada (i.e., não existem fatores variáveis multiplicando-a, exceto fatores constantes). Este fato é que define sua aplicação em E.Ds. lineares com coeficientes constantes.

Entretanto, é necessário tomar cuidado com a aplicação das fórmulas que fornecem a transformada de derivadas sucessivas, uma vez que em sua dedução supõem-se comportamentos definidos da função e suas derivadas. Este aspecto é realmente o que define a escolha, quanto ao tipo de transformada, que deve ser feita para resolver uma E.D. linear com coeficientes constantes.

7.4.5.1 - Transformada de Fourier

Na dedução da fórmula

$$F\left\{ \frac{d^n y(x)}{dx^n} \right\} = (ik)^n \, F\left\{ y(x) \right\} , \qquad \text{(VII.4.41)}$$

deve-se lembrar que se supôs, implicitamente, que

$$y(\pm\,\infty) = \frac{d}{dx}\, y(\pm\,\infty) = \,.......= \frac{d^{n-1}}{dx^n}\, y(\pm\,\infty) = 0 \qquad \text{(VII.4.42)}$$

Esta série de condições implica que as condições de contorno (valores nos extremos $x = \pm\,\infty$) já se encontram dadas. Em outras palavras, utilizando-se a transformada de Fourier, na solução de E.Ds., as soluções obtidas não admitem a imposição de nenhuma outra condição. Note-se que a solução é válida no espaço infinito.

Suponha-se a E.D.

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_1 y' + a_0 y = F(x) \qquad \text{(VII.4.43)}$$

Tomando-se a transformada de Fourier desta equação, e chamando-se

$$\mathcal{F}\left\{ y(x) \right\} = Y(k) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}\left\{ F(x) \right\} = \Phi(k),$$

tem-se:

$$\left[(ik)^n + (ik)^{n-1}\, a_{n-1} + \ldots\ldots + a_1 ik + a_0\right] Y(k) = \Phi(k)\,. \qquad \text{(VII.4.44)}$$

Esta expressão mostra, primeiro, que $F(x)$ tem que existir ($F(x) \neq 0$), e satisfazer a condição $F(\pm\infty) = 0$, de outra maneira não teria transformada de Fourier. Supondo-se que $\Phi(k)$ existe, a expressão (VII.4.44), depois de encontrada sua transformada inversa, fica:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(k)\; e^{ikx}\; dk}{(ik)^n + \sum\limits_{m=1}^{n} a_{n-m}\,(ik)^{n-m}}\,. \qquad \text{(VII.4.45)}$$

Soluções reais poderão ser obtidas unicamente quando n for um número par. Por exemplo, seja a E.D. linear de primeira ordem

$$y' + ay = F(x).$$

Supondo-se que F(x) satisfaz as condições de Dirichlet, a solução (VII.4.45), neste caso, é:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(k)\ e^{ikx}}{a + ik}\, dk$$

É evidente que, para este caso, uma solução real não existe, conforme pode se verificar ao se tentar uma integração no plano complexo k. Isto, porém, não é uma surpresa, uma vez que a solução da E.D. linear de primeira ordem tem uma forma que não satisfaz às condições (VII.4.42).

Portanto, a transformada de Fourier resolve E.Ds. do tipo

$$y^{(2n)} + a_{2n-2}\, y^{(2n-2)} + \ldots\ldots + a_2 y'' + a_0 = F(x), \qquad \text{(VII.4.46)}$$

sujeitas às condições (VII.4.42), e pelo menos a primeira destas para F(x).

7.4.5.2 - Transformadas Fourier-Seno e Fourier-Co-seno

Do Capítulo VI tem-se que

$$F_s \left\{ y'(x) \right\} = - k \, F_c \left\{ y(x) \right\}$$

$$F_c \left\{ y'(x) \right\} = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \; y(0) + k \, F_s \left\{ y(x) \right\} .$$

Contudo, deve-se lembrar, também, que as transformadas das derivadas de ordem ímpar têm o inconveniente de gerar transformadas mistas. Por esta razão, estas transformadas são úteis na solução de E.Ds. do tipo (VII. 4.46), em regiões $x \geqslant 0$.

Estas transformadas exigem que as soluções tenham o comportamento,

$$y(\infty) = \frac{d}{dx} y(\infty) = \ldots\ldots\ldots = \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} y(\infty) = 0,$$

assim como, também que $F(\infty) = 0$, isto porque as propriedades,

$$F_c \left\{ y^{(2n)}(x) \right\} = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \; y^{(2n-2)}(0) - k^2 \, F_c \left\{ y^{(2n-2)}(x) \right\} \tag{VII.4.47}$$

$$L\left\{y^{(n)}(x)\right\} = S^n\, L\left\{y(x)\right\} - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}\, y^{(k-1)}(0) \qquad \text{(VII.4.49)}$$

onde os fatores $f^{(k-1)}(0)$ podem ser considerados "constantes de integração".

EXEMPLO 7.36

Encontre-se a solução geral da E.D.

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad x \geqslant 0$$

$$L\left\{y''\right\} + 4\,L\left\{y'\right\} + 4\,L\left\{y\right\} = 0.$$

Chamando-se $Y(s) = L\{y(x)\}$, tem-se:

$$s^2 Y - s\,y(0) - y'(0) + 4\,s\,Y - 4\,y(0) + 4Y = 0.$$

Chamando-se, ainda, $y(0) = a$, e $y(0) = b$, tem-se que:

$$Y(s) = \frac{as + 4a + b}{(s+2)^2} = \frac{a}{s+2} + \frac{2a + b}{(s+2)^2}$$

Das tabelas de transformação inversa de Laplace, pode-se ver que:

$$y(x) = L^{-1}\left\{Y(s)\right\} = \left[\,a + (2a + b)x\,\right] e^{-2x}$$

Definindo-se

$$2a + b = C_1$$

e

$$a = C_1$$

a solução geral fica:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{-2x} \, .$$

Observa-se que nesta solução podem ser impostas condições de contorno, e não apenas iniciais, conforme poderia ter sugerido a utilização da transformada de Laplace.

7.4.5.4 - Diminuição do Número de Variáveis Independentes numa E.D. Parcial

Quando uma função de mais de uma variável independente, $f(x, y, z, \ldots.)$, é submetida a uma transformada integral, é necessário especificar, em relação a qual das variáveis independentes é feita a transformação. As outras variáveis se comportarão como parâmetros constantes durante a transformação. Assim, a transformada de Fourier de uma função $f(x, y, z, \ldots.\, w)$, em relação à variável y, é:

$$F_y \left\{ f(x, y, z, \ldots.\, w) \right\} = g(x, k, z, \ldots. w) \qquad \text{(VII.4.50)}$$

Este detalhe permite que uma E.D parcial do tipo.

$$A \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} + D \frac{\partial \Psi}{\partial x} + E \frac{\partial \Psi}{\partial y} + K\Psi = 0 \qquad \text{(VII.4.51)}$$

ou outra similar com maior número de variáveis independentes, possa ser submetida à transformação em relação a uma das variáveis e, portanto, diminui-se o número de variáveis independentes. Por exemplo, tomando-se a transformada de Laplace, da equação (VII.4.51), em relação à variável x, tem-se

$$A \, L \left\{ \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} \right\} + B \frac{\partial^2}{\partial y^2} L \left\{ \Psi \right\} + C \frac{\partial}{\partial y} L \left\{ \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right\} + E \frac{\partial}{\partial y} L \left\{ \Psi \right\} +$$

$$+ K \, L \left\{ \Psi \right\} = 0.$$

É evidente que, depois de efetuar as transformações das derivadas, a nova E.D. será uma ordinária, cuja solução pode ser encontrada pelos métodos conhecidos. Quando (VII.4.51) é restrita a condições iniciais e de contorno, deve-se tomar cuidado para se encontrar estes tipos de condições para a E.D. resultante, depois de transformada.

EXEMPLO 7.37

Seja a E.D. Parcial

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0 \qquad x > 0, \quad t > 0,$$

onde $\Psi = \Psi(x,t)$, com as seguintes condições:

$$\Psi(0, t) = T_0 \quad ; \quad \Psi(x, 0) = 0 \quad ; \quad \Psi(\infty, t) = 0.$$

Observe-se que as condições de contorno, na variável x, são apropriadas à utilização da transformada Fourier-seno, e na variável t, à utilização da transformada de Laplace. (Deve-se ressaltar, contudo, que na variável x podem também ser utilizadas as transformadas de Laplace ou inclusive, a de Fourier-co-seno, uma vez que ambas têm capacidade para satisfazer as condições de contorno).

$$F_s\left\{\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right\} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} F_s\left\{\Psi\right\} = 0$$

$$F_s\left\{\Psi(x, t)\right\} = \Phi(k, t)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k\, \Psi(0, t) - k^2\, \Phi(k,t) - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(k,t) = 0,$$

de onde se tem:

$$\frac{d\Phi}{dt} + k^2\, \alpha\, \Phi = \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k\, T_0 .$$

O que resta é encontrar a condição inicial para esta nova E.D. (que é uma linear de primeira ordem)

$$\Phi(k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \Psi(x,t) \operatorname{sen} kx \; dx$$

$$\Phi(k,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty 0 \times \operatorname{sen} kx \; dx = 0.$$

Assim, a E.D parcial converte-se numa ordinária de primeira ordem, com sua condição inicial especificada. A solução para $\Phi(k,t)$ é:

$$\Phi(k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{T_0}{k} \left(1 - e^{-k^2 \alpha t} \right)$$

solução que também é da E.D. parcial, porém, no espaço das transformadas.

A solução da E.D. parcial, no espaço das variáveis primitivas, é obtida ao se encontrar a transformada Fourier-seno inversa de $\Phi(k,t)$:

$$\Psi(x,t) = F_s^{-1} \left\{ \Phi(k,t) \right\} = \frac{2}{\pi} T_0 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-k^2 \alpha t}}{k} \operatorname{sen} kx \; dk.$$

o resultado é:

$$\Psi(x, t) = T_0 \left[1 - \text{erf} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\alpha t} \right) \right],$$

onde erf(x) é a função erro (ver Capítulo IV).

EXEMPLO 7.38

Seja a E.D.

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0$$

$$\Psi(\pm\infty, t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\pm\infty, t) = 0$$

$$\Psi(x,0) = f(x) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,0) = h(x).$$

Devido às condições de contorno, nas variáveis x e t, convêm utilizar as transformadas de Fourier e Laplace, respectivamente. Tomando-se a transformada de Fourier da E.D. parcial, e chamando

$$F_x \left\{ \Psi(x,t) \right\} = g(k,t),$$

tem-se a E.D. ordinária:

$$\frac{d^2}{dt^2} g + (kc)^2 g = 0$$

com as condições iniciais:

$$g(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx = G_1(k)$$

$$\frac{d}{dt} g(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, e^{-ikx}\, dx = G_2(k).$$

O que resta a fazer é resolver esta E.D. de segunda ordem, e logo encontrar a transformada inversa.

7.5 - E.D. LINEAR COM COEFICIENTES VARIÁVEIS

Nesta seção apresentar-se-á o tratamento de equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis e de características especiais. Casos mais gerais das E.Ds. lineares, serão estudadas mais tarde.

Certas propriedades, deduzidas para as equações lineares com coeficientes constantes, são também aplicáveis ao caso presen te, conforme se deveria esperar, uma vez que as E.Ds. com coeficientes constantes representam, apenas, um caso especial das de coeficientes variáveis. As propriedades de maior importância, das E.Ds. lineares com coeficientes constantes, aplicáveis ao presente caso são: a) As soluções da equação reduzida formam um espaço vetorial de funções linearmente independentes; b) a solução geral da E.D. completa é a soma da solução complementar (solução da parte reduzida) e uma solução particular (qualquer) da equação completa.

7.5.1 - Equação Linear de Euler

A E.D. de Euler é definida pela seguinde forma geral:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} x^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y =$$

$$= F(x) \qquad \text{(VII.5.1)}$$

Esta equação é transformada numa E.D. linear com coeficientes constantes, mediante a mudança de variável

$$x = e^t.$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x},$$

de onde,

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

Por outro lado,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) y ,$$

de onde,

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) y.$$

Pode-se, ainda, verificar que:

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \left(\frac{d}{dt} - 2 \right) \right] y.$$

Chamando-se $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$, pode-se ver que:

$$x \frac{dy}{dx} = \mathcal{D}y$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \mathcal{D}(\mathcal{D} - 1)y$$

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = \mathcal{D}(\mathcal{D} - 1)(\mathcal{D} - 2)y.$$

De maneira geral, pode-se demonstrar que:

$$x^n \frac{d^ny}{dx^n} = \mathcal{D}(\mathcal{D} - 1)(\mathcal{D} - 2)(.........)(\mathcal{D} - n + 1)y.$$

Substituindo-se esta relações na E.D. (VII.5.1) tem-se:

$$(\mathcal{D}^n + A_{n-1}\mathcal{D}^{n-1} + ...+ A_1\mathcal{D} + A_0)y = F(e^t), \qquad \text{(VII.5.2)}$$

onde, todas as constantes a_j da Equação (VII.5.1), e os coeficientes numéricos dos polinômios em $\mathcal{D}$, foram agrupados nos parâmetros constantes A_j, da equação anterior. Observe-se que a equação resultante é uma linear com coeficientes constantes.

A solução da parte reduzida da E.D. (VII.5.2), é da forma

$$y = e^{rt}.$$

Porém, $x = e^t$, ou também, $t = \ell n\, x$.

Logo, a solução complementar fica,

$$y = e^{r \ln x} = e^{\ln x^r} = x^r$$

Este é um resultado muito importante, já que revela que a solução da equação reduzida, corresponde à E.D. linear de Euler (VII.5.1), admite soluções do tipo

$$y = x^r \qquad \text{(VII.5.3)}$$

Desta maneira, o que se tem a fazer, para se encontrar as soluções da parte reduzida da E.D. de Euler, é resolver uma nova "equação característica", para o parâmetro r, que é obtido substituindo-se (VII.5.3) na E.D. de Euler. Este procedimento é mais fácil de se entender com um exemplo.

EXEMPLO 7.39

Seja resolver a seguinte E.D. definida no espaço semi-infinito indicado

$$x^2 y'' - 3xy' - 5y = x^2 \ln x, \qquad x > 0$$

Conforme assinalado anteriormente, a parte reduzida da equação

$$x^2 y'' - 3xy' - 5y = 0$$

tem soluções do tipo

$$y = x^r \quad ; \quad y' = r\,x^{r-1} \quad ; \quad y'' = r(r - 1)\,x^{r-2}.$$

Substituindo-se estas relações na E.D. reduzida, tem-se:

$$r(r - 1)\,x^r - 3\,r\,x^r - 5\,x^r = 0,$$

de onde vem a chamada "equação característica",

$$r(r - 1) - 3\,r - 5 = 0$$

$$(r + 1)\,(r - 5) = 0.$$

Portanto, as soluções da equação reduzida são:

$$y_{c1} = x^{-1} \quad ; \quad y_{c2} = x^{5}.$$

A solução geral da E.D., proposta, pode ser encontrada pelo método de variação de parâmetros, i.e.

$$y(x) = A(x)\,y_{c1}(x) + B(x)\,y_{c2}(x)$$

onde, A(x) e B(x) são dadas pelas relações (VII.4.36). Porém, antes de se utilizar diretamente estas fórmulas, deve-se tomar cuidado com a iden tificação da função F(x), já que as expressões (VII.4.36) foram encontradas sob a suposição de que o coeficiente de y" é 1, conforme mostra a equação (VII.4.30).

Assim, para o caso presente, a E.D. proposta tem que ser previamente dividida por x^2. Desta maneira, $F(x) = \ln x$ e, portanto,

$$A(x) = - \int \frac{x^5 \ln x}{6x^3} dx + C_1 = - \frac{x^3}{18} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C_1 .$$

Analogamente,

$$B(x) = - \frac{1}{18\, x^3} \left(\ln x + \frac{1}{3} \right) .$$

Finalmente, a solução fica

$$y(x) = C_1\, x^{-1} + C_2\, x^5 - \frac{x^2}{9} \ln x .$$

Pode-se ver que a solução para o ponto x = 0 não existe. Isto poderia ter sido previsto quando se fez a divisão da E.D. por x^2, já que os termos contendo y e y' tornar-se-iam infinitos.

É necessário ressaltar que, ao se fazer a troca de variável $t = \ln x$, supõe-se, implicitamente, que as soluções deverão, necessàriamente, ser válidas para $x > 0$, dado que o $\ln x$ é real unicamen te para estes casos. Isto, contudo, não significa que a equação de Euler não admita soluções para $x < 0$. Para ter soluções na região negativa de x faz-se a troca $x = - \xi$ onde $\xi > 0$. Fazendo-se esta troca na E.D. de Euler (VII.5.1), observa-se que a parte reduzida da equação fica inalterada, de onde vem que a solução complementária é a mesma para ambas as regiões.

Certas dificuldades que podem aparecer são as relacionadas aos valores especiais da equação característica. Por exemplo, o que fazer se as raízes de r forem complexas? e se forem múltiplas?

Na realidade este tipo de inconveniente precisa apenas de uma simples manipulação algébrica similar ao que se costuma fazer numa E.D. linear com coeficientes constantes, quando surgem casos de raízes complexas e múltiplas.

A maneira mais simples de se mostrar o procedimento para resolver estes casos é apresentando-se alguns exemplos ilustrativos:

EXEMPLO 7.40

Encontre-se a solução da E.D.

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0,$$

tanto para $x > 0$ como para $x < 0$.

a) $x > 0$. Este caso não oferece nenhuma dificuldade, podendo-se verificar que a equação característica é:

$$2r^2 + r - 1 = 0$$

de onde,

$$r_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad r_2 = -1.$$

Logo,

$$y(x) = C_1 x^{1/2} + C_2 x^{-1} \qquad x > 0$$

b) $x < 0$. Fazendo-se

$$x = -\xi \quad ; \quad \xi > 0,$$

e substituindo-se na E.D. proposta, pode-se verificar que, a E.D. resultante é da forma

$$2\xi^2 \frac{d^2y}{d\xi^2} + 3\xi \frac{dy}{d\xi} - y = 0.$$

A solução desta E.D. é, portanto,

$$y(\xi) = C_3\,\xi^{1/2} + C_4\,\xi^{-1}, \qquad \xi > 0$$

de onde,

$$y(-|x|) = C_3(-|x|)^{1/2} + C_4(-|x|)^{-1} .$$

Assim, a solução geral da E.D. será:

$$y(-|x|) = D_3\,|x|^{1/2} + D_4\,|x|^{-1} \qquad x \neq 0$$

Embora as soluções para $x > 0$ e $x < 0$ sejam da mesma forma, as condições de contorno poderão ser diferentes.

EXEMPLO 7.41

A seguir, um exemplo onde as raizes, da equação característica, são complexas.

$$x^2 y'' + x y' + y = 0.$$

Depois de substituir $y = x^r$, pode-se ver que, a equação característica é:

$$r^2 + 1 = 0,$$

de onde,

$$r_1 = i \quad ; \quad r_2 = -i.$$

Logo, a solução fica,

$$y(x) = C_1\, x^{i} + C_2\, x^{-i} = C_1\, e^{i\,\ell n\, x} + C_2\, e^{-i\,\ell n\, x}.$$

$$y(x) = C_1 \left[\cos(\ell n\, x) + i \,\text{sen}\,(\ell n\, x)\right] + C_2 \left[\cos(\ell n\, x) - i \,\text{sen}\,(\ell n\, x)\right]$$

$$= (C_1 + C_2) \cos(\ell n\, x) + i(C_1 - C_2)\,\text{sen}(\ell n\, x).$$

Finalmente,

$$y(x) = A \cos(\ell n\, x) + B \,\text{sen}(\ell n\, x),$$

onde os coeficientes A e B são as novas constantes de integração. Observe que, neste caso soluções reais existem somente para $x > 0$.

EXEMPLO 7.42

Este exemplo ilustra uma equação de Euler, onde as raízes da equação característica são múltiplas.

$$x^4\, y^{(iv)} + 4\,x^3\, y''' + x^2\, y'' + x\,y' - y' = 0 \qquad x > 0$$

Pode-se verificar que a equação característica desta E.D. é

$$r^4 - 2r^3 + 2r - 1 = 0,$$

cujas raízes são

$$r_1 = r_2 = r_3 = 1 \quad : \; r_4 = -1.$$

Neste ponto é necessário lembrar que estas raízes são soluções da equação característica da parte reduzida de (VII.5.2), cujas soluções são da forma e^{rt}. Por outro lado, sabe-se que para raízes multiplas, a E.D. reduzida é escrita na forma

$$y = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)\, e^{r_1 t} + C_4\, e^{r_2 t}.$$

Logo, lembrando-se que $t = \ell n\, x$, tem-se

$$y = (C_1 + C_2\, \ell n\, x + C_3\, \ell n^2\, x)\, x + C_4\, x^{-1}.$$

7.5.2 - Diminuição da ordem de uma E.D. de segunda ordem quando é conhecida uma das soluções

De uma maneira análoga à diminuição do grau de uma equação algébrica, quando é conhecida uma, ou mais raízes da equação, numa E.D. linear, é também possível diminuir a ordem da E.D., quando se co nhece, uma ou mais, soluções da equação reduzida. Este procedimento é, certamente, muito útil nos casos em que é possível conhecer, mediante argumentos físicos, pelo menos uma das soluções de uma E.D. reduzida.

O caso mais simples, é também mais comum, é o de uma *equação linear de segunda ordem*. Considere-se primeiro o caso da E.D. reduzida

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0. \qquad \text{(VII.5.4)}$$

Chamando-se $y_1(x)$ à solução conhecida, procurar-se-á a solução geral da E.D. anterior, na forma:

$$y = y_1(x)\; v(x), \qquad \text{(VII.5.5)}$$

onde v(x) é uma função a ser determinada. Substituindo-se (VII.5.5), e suas derivadas, na E.D. (VII.5.4), e depois de se rearranjar os termos apropriadamente, tem-se:

$$v'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + P \right) v' + \frac{1}{y_1} \left(y_1'' + P y_1' + Q y_1 \right) v = 0 \qquad \text{(VII.5.6)}$$

Evidencia-se que, sendo y_1 uma solução da E.D. (VII.5.4) o último parênteses é identicamente nulo, de onde vem que

$$v'' + \left(2\,\frac{y_1'}{y_1} + P \right) v' = 0. \qquad \text{(VII.5.7)}$$

Note-se que esta nova E.D. é de primeira ordem em v'. Integrando-se (VII.5.7), tem-se uma constante de integração. Integrando-se novamente o resultado, obtém-se v(x), e simultaneamente, uma segunda constante de integração. Finalmente, substituindo-se v(x) em (VII.5.5), obtém-se a solução geral da E.D de segunda ordem.

Considere-se agora o caso da E.D completa.

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = F(x) \qquad \text{(VII.5.8)}$$

Supõe-se, também neste caso, que é conhecida uma das soluções y_{c1} da parte reduzida desta equação. Como no caso da E.D reduzida, procura-se uma solução geral de (VII.5.8) na forma

$$y = y_{c1}(x)\;v(x) \qquad \text{(VII.5.9)}$$

Pode-se verificar que substituindo-se esta relação na (VII.5.8), obtém-se a equação análoga à (VII.5.7).

$$v'' + \left(2\frac{y'_{c1}}{y_{c1}} + P\right)\;v' = F(x) \qquad \text{(VII.5.10)}$$

Esta nova equação é, de novo, uma E.D. de primeira ordem. De fato, pode-se reconhecer que (VII.5.10) é uma E.D. linear de primeira ordem em v' cuja solução foi encontrada na subseção 7.2.3. Portanto, depois de duas integrações sucessivas de (VII.5.10) e substituindo-se v(x) na relação (VII.5.9), obtém-se a solução geral da E.D. (VII.5.8).

É interessante notar que se fosse procurada uma solução da E.D. (VII.5.8), na forma

$$y(x) = u(x) \quad v(x), \qquad \text{(VII.5.11)}$$

onde u(x) e v(x) são funções arbitrárias ligadas apenas pela E.D., poder-se-ia escolher uma segunda condição, para que as funções fiquem conpletamente definidas, de maneira a se obter uma E.D. simplificada. Assim, substituindo-se (VII.5.11) em (VII.5.8) e agrupando-se os termos convenientemente, obtém-se uma equação similar à (VII.5.6):

$$v'' + \left(2 \frac{u'}{u} + P \right) u' + \frac{1}{u} \left(u'' + P u' + Q u \right) v = 0 \qquad \text{(VII.5.12)}$$

Esta é uma das equações que relaciona as funções u(x) e v(x). A outra equação, que se precisa, pode ser escolhida de maneira que

$$2 \frac{u'}{u} + P = 0, \qquad \text{(VII.5.13)}$$

de onde

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)\, dx} \qquad \text{(VII.5.14)}$$

(Deve ficar claro que não se pode escolher u" + Pu' + Qu = 0, uma vez que u é uma função arbitrária e não uma solução da parte reduzida da E.D.). Desta maneira, a E.D. em v(x), fica

$$v'' + \frac{1}{u}\,(u'' + P\,u' + Q\,u)\,v = 0,$$

ou, de uma maneira mais simplificada, substituindo-se as derivadas de u(x), obtêm-se:

$$v'' - \left(\frac{1}{4}\,P^2 + \frac{1}{2}\,P' - Q\right)v = 0. \qquad \text{(VII.5.15)}$$

Esta nova forma da E.D. é, às vezes, conveniente para a obtenção de soluções aproximadas, conforme será visto mais tarde.

EXEMPLO 7.43

Sabendo-se que $y = x$ é uma solução da parte reduzida da equação

$$(1 - x)\,y'' + x\,y' - y = (1 - x)^2, \qquad \text{para } x \neq 1,$$

encontre-se a solução geral desta E.D.

Evidentemente,

$$y''_{c1} + \frac{x}{1 - x}\,y'_{c1} - \frac{1}{1 - x}\,y_{c1} = 0.$$

A solução geral pode ser encontrada de duas maneiras: a) encontrando-se a solução geral da equação reduzida (solução complementar) por uma simples integração de equação (VII.5.7), e, logo, aplicando-se o método de variação de parâmetros, ou, b) fazendo-se diretamente a troca $y = y_{c1}(x)\, v(x)$ na E.D. completa e integrando-se depois à equação resultante:

a) Seja primeiro encontrar a solução geral da parte reduzida da E.D.

A equação (VII.5.7) com $y_{c1} = x$, fica

$$v'' + \left(2\frac{1}{x} + \frac{x}{1 - x} \right) v' = 0$$

$$\frac{dv'}{v'} + \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{1 - x} \right) dx = 0$$

$$v' = \frac{dv}{dx} = C_1' \, e^{-\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{1 - x} \right) dx} = C_1' \, e^{x + \ln\left(\frac{1 - x}{x^2}\right)}$$

$$v = C_1' \int \frac{1 - x}{x^2} e^x \, dx + C_2' = \frac{e^x}{x} + C_2' .$$

Assim, a solução geral da E.D. reduzida, que é a solução complementar da E.D. completa é:

$$y(x) = x\left(C_1' \frac{e^x}{x} + C_2' \right) = C_1' e^x + C_2' x .$$

Portanto, a segunda solução procurada para a equação reduzida é: $y_{c2} = e^x$.

O que resta a fazer, é encontrar a solução geral pelo método de variação de parâmetros,

$$y(x) = A(x) y_{c1}(x) + B(x) y_{c2}(x).$$

Pode-se verificar, que

$$A(x) = x + C_1 \quad ; \; B(x) = - e^{-x} (x + 1) + C_2$$

Logo, a solução final, fica

$$y(x) = x^2 - x - 1 + C_1 x + C_2 e^x$$

b) A seguir, encontrar-se-á a solução geral da E.D. completa, de maneira que esta solução seja da forma

$$y = x v(x).$$

Assim, a equação (VII.5.10), para este caso fica

$$v'' + \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{1 - x} \right) v' = 1 - x.$$

Esta nova equação, conforme já foi apontado, é uma E.D. linear de primeira ordem. Portanto, sua solução, segundo (VII. 2.13), é:

$$v' \, e^{\int\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{1-x}\right)dx} = \int (1-x) \, e^{\int\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{1-x}\right)dx} dx + C_1$$

O restante é um simples exercício de integração para se obter v'. Integrando-se novamente, tem-se v(x) (com duas constantes de integração) e, portanto, a solução geral $y = y_{c1}(x) \; v(x)$ fica definida.

7.5.3 - Método da Variação de Parâmetros para a Diminuição da Ordem de uma E.D. Linear

O problema de diminuir a ordem de uma *E.D. linear de ordem superior*, conhecendo-se duas, ou mais, soluções da parte reduzida, é um pouco mais complicado. Em princípio, poder-se-ia fazer uso do método, descrito anteriormente, abaixando-se, uma de cada vez, a ordem da E.D.. Porém, este método apresenta a dificuldade de ter que se identificar uma solução da E.D. de ordem já diminuída, isto porque as soluções disponíveis não são, necessàriamente, soluções das equações resultantes de ordem inferior.

A seguir, será descrito um método alternativo, onde é feita uma única substituição, utilizando-se todas as soluções conheci das, obtendo-se, como resultado, uma nova E.D., cuja ordem aparece, automaticamente, diminuída de um número igual ao número de soluções conhecidas. O tratamento é muito parecido ao método de variação de parâmetros, desenvolvido para se obter soluções gerais de E.Ds. completas partindo-se de soluções da parte reduzida da E.D.. Por esta razão é chamado, também, de *método de variação de parâmetros,* para a diminuição da ordem de uma E.D. linear.

Objetivando-se simplificações nas análises, considere-se a E.D. de terceira ordem

$$y''' + P(x)\, y'' + Q(x)\, y' + R(x)\, y = F(x) \qquad \text{(VII.5.16)}$$

Supondo-se que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções conhecidas da parte reduzida desta E.D., forma-se a função

$$y(x) = y_1(x)\; u(x) + y_2(x)\; v(x), \qquad \text{(VII.5.17)}$$

onde, $u(x)$ e $v(x)$ são funções desconhecidas.

$$y' = y_1'\, u + y_2'\, v + y_1\, u' + y_2 v'$$

As funções $u(x)$ e $v(x)$ ficam determinadas ao se impor, como antes, a condição seguinte:

$$y_1\, u' + y_2\, v' = 0 \qquad \text{(VII.5.18)}$$

Derivando-se y(x) pela segunda vez, tem-se:

$$y'' = y_1'' u + y_2'' v + y_1' u' + y_2' v'.$$

Derivando-se pela terceira vez, tem-se:

$$y''' = y_1''' u + 2y_1'' u' + y_1' u'' + y_2''' v + 2y_2'' v + y_2' v''.$$

As expressões obtidas para y(x) e suas derivadas, podem agora ser substituídas na E.D. (VII.5.16). O resultado, após um arranjo conveniente, é:

$$(y_1''' + P y_1'' + Q y_1' + R y_1) u + (y_2''' + P y_2'' + Q y_2' + R y_2) v +$$

$$+ (2 y_1'' + P y_1') u' + (2 y_2'' + P y_2') v' + y_1' u'' + y_2' v'' = F(x).$$

Evidentemente, os dois primeiros parênteses são identicamente nulos. Logo

$$y_1' u'' + y_2' v'' + (2 y_1'' + P y_1') u' + (2 y_2'' + P y_2') v' = F(x) \qquad \text{(VII.5.19)}$$

Por outro lado, de (VII.5.18), tem-se, ainda,

$$v' = -\frac{y_1}{y_2} u' \qquad ; \qquad v'' = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_2^2} u' - \frac{y_1}{y_2} u''.$$

Substituindo-se estes valores na equação (VII.5.19) e rearranjando-se os termos convenientemente, tem-se a equação:

$$\frac{1}{y_2}(y_1' y_2 - y_1 y_2') u'' + \left[2 y_1'' + P y_1' - \frac{y_1}{y_2}(2 y_2'' + P y_2') - \right.$$

$$\left. - \frac{y_2'}{y_2^2}(y_1' y_2 - y_1 y_2')\right] u' = F(x) \qquad \text{(VII.5.20)}$$

Evidencia-se que esta é uma E.D. de primeira ordem (alias, uma E.D. linear de primeira ordem) em u'. Integrando-se (VII.5.20) obtêm-se u'(x) (com a primeira constante de integração). Tornando-se a integrar o resultado, tem-se u(x) (mais a segunda constante de integração). Finalmente, integrando-se diretamente, v'(x) (onde aparece a terceira constante de integração), a solução geral da E.D. (VII.5.16) fica estabelecida pela substituição de u(x) e v(x) na relação (VII.5.17).

EXEMPLO 7.44

Sabendo-se que $y_{c1} = x$ e $y_{c2} = x \ell n\, x$ são duas soluções da parte reduzida da equação

$$y''' + \frac{1}{x^2} y' - \frac{1}{x^3} y = \frac{1}{x^4} \qquad x > 0,$$

pede-se encontrar a solução geral desta equação.

A solução proposta, é

$$u = x\,u(x) + x\,\ell n\,x\;v(x).$$

Derivando-se esta expressão, tem-se:

$$y' = u + (\ell n\,x + 1)v + x\,u' + x\,\ell n\,x\;v'.$$

A condição que liga as funções u e v é obtida, fazendo-se com que a soma dos dois últimos termos seja nula. Assim,

$$u' + \ell n\,x\;v' = 0.$$

Derivando-se, a solução procurada pela segunda e terceira vez, respectivamente, tem-se:

$$u'' = u' + (\ell n\,x + 1)\,v' + \frac{1}{x}\,v$$

$$y''' = u'' + (\ell n\,x + 1)\,v'' + \frac{2}{x}\,v' - \frac{1}{x^2}\,v.$$

Logo, a E.D. proposta, após feitas as simplificações necessárias, fica:

$$u'' + (\ell n\,x + 1)\,v'' + \frac{2}{x}\,v' = \frac{1}{x^4}\,.$$

Porém,

$$u' = -\,\ell n\,x\;v'$$

de onde,

$$u'' = -\left(\frac{v'}{x} + \ln x \; v''\right).$$

Substituindo-se os valores destas derivadas na equação anterior, vem

$$v'' + \frac{1}{x} v' = \frac{1}{x^4}$$

A solução desta E.D. linear de primeira ordem em v', é:

$$v' = -\frac{1}{2} x^{-3} + C_1 x^{-1}$$

O que resta a fazer é efetuar integrações, primeiro de v(x) e depois de u'(x). Pode-se verificar que a solução geral da E.D. proposta é:

$$y(x) = C_1 x \ln^2 x + C_2 x \ln x + C_3 x - \frac{1}{8x} .$$

7.5.4 - Sobre a Existência e Unicidade das Soluções de uma E.D. Linear

Nesta subseção serão apontadas as condições que garantem a existência e unicidade da solução de uma E.D. linear. A prova destes requisitos fica fora do enfoque deste Capítulo e, portanto, o leitor interessado poderá consultar a literatura a respeito.

Considere-se, novamente, a forma generalizada de uma E.D. linear de ordem n,

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + f_1(x)y' + f_0(x)y = F(x) \qquad \text{(VII.5.21)}$$

Imagine-se, por exemplo, que a função $f_k(x)$ seja uma função similar no ponto $x = x_s$. (Isto é, $f_k(x)$ pode, por exemplo, ser uma função descontinua em x_s, ou ter um ponto de ramificação, ou simplesmente ter um polo neste ponto). Fica evidente que a E.D. (VII.5.21) terá uma expressão modificada neste ponto, e a solução poderá não existir. Desta maneira vê-se que a solução de uma E.D. linear depende fundamentalmente da característica dos seus coeficientes.

De uma maneira geral pode-se demonstrar que soluções da E.D. (VII.5.21) existem, quando os coeficientes $f_k(x)$ da E.D. são funções analíticas (no sentido da definição de analiticidade visto no Capítulo IV). Ou, em termos mais gerais, as soluções de (VII.5.21) existem em regiões, do plano complexo, onde as funções $f_k(x)$ são analíticas. Em determinados casos, porém, existem soluções de (VII.5.21) em pontos onde algum, ou alguns, dos coeficientes $f_k(x)$ possui polos.

No que diz respeito à unicidade da solução (existência de uma única solução), demonstra-se que a solução é única, quando, além de satisfazer a E.D., se verifica que ela também satisfaz às condições iniciais, de contorno, ou outras condições de valores predeterminados. O conceito de unicidade na solução de uma E.D. é importante, especialmente nos casos em que empregando-se métodos diferentes na integração de uma E.D., obtém-se soluções que aparentemente são, também, diferentes. Porém, se estas soluções satisfizerem as condições de unicidade da solução, então, será possível demonstrar (por exemplo, desenvolvendo-se estas soluções em séries de potências) que elas são iguais.

EXEMPLO 7.45

Seja a E.D.:

$$(1 + x^2)\, y'' - xy' = 0 \quad \text{com } y(0) = 0 \quad \text{e } y'(0) = 1$$

Nesta E.D. linear identifica-se que os coeficientes variáveis são:

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \text{e} \qquad f_0(x) = 0.$$

Assim, soluções desta E.D. existem para todos os pontos do plano complexo x, exceto no $x = \pm i$, onde soluções podem não existir. Porém se a solução é procurada apenas para valores reais de x, então, pode-se dizer que existem soluções da E.D. para todos os valores de x.

A solução geral desta E.D. é obtida facilmente, observando-se que esta representa uma de variáveis separadas em y'. Assim, a solução geral é:

$$y(x) = C_1 \text{ arc sen } x + C_2.$$

Pode-se verificar que a solução, que satisfaz às condições iniciais, é:

$y(x) = \text{arc sen } x.$

Por outro lado, integrando-se esta mesma E.D. pelo método de séries de potências (a ser desenvolvido no item seguinte), é satisfazendo-se as condições iniciais, tem-se:

$$y(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \ldots$$

A unicidades estas duas soluções é verificada, desenvolvendo-se arc sen x em série de Taylor e identificando-a com a solução em série, obtida por último.

7.6 - SOLUÇÃO EM SÉRIE DE POTÊNCIAS

Todos os métodos de solução de E.Ds, ordinárias, vistos até que aqui, visavam obter soluções em forma fechada. No entanto, esses métodos são aplicáveis a equações que possuam determinadas características especiais, excetuando as E.Ds. lineares com coeficientes constantes, cujas soluções, em geral, sempre podem ser obtidas pelos métodos já descritos. Contudo, uma E.D. linear com coeficientes variáveis, que apresenta muitas dificuldades para se ter uma solução em forma fechada, sempre pode ser resolvida em forma de série de potências.

Já que as soluções, que se pretende obter, são na forma de série de potências, então elas deverão ser analisadas como tal. Ou seja, o problema de convergência deverá necessariamente, ser relevante. Assim, as séries-soluções terão um determinado raio de convergência. Isto, obviamente, implica que a solução será válida somente dentro da região abrangida pelo círculo de convergência. Portanto, a análise desenvolvida no Capítulo IV, a este respeito, será de aplicação direta ao que se segue. Desta maneira, é evidente a conveniência em se pensar em termos de *equações diferenciais de variável complexa,* e não só de variável real, já que assim não se perde conceitos de alto interesse, tais como: ponto regulares, polos, pontos de ramificação, etc. Embora a notação, no desenvolvimento que se segue seja a de variável real, não se deverá esquecer que os resultados são também aplicáveis a regiões que constituem continuações analíticas no plano complexo z.

7.6.1 - Método de Frobenius

Considere-se a forma geral de uma E.D. linear reduzida.

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + f_k(x)\, y^{(k)} + \ldots + f_1(x)\, y' + f_0 y = 0 \qquad \text{(VII.6.1)}$$

Certamente, encontrando-se as soluções desta E.D., a solução da equação completa ($F(x) \neq 0$) será determinada, por exemplo, pelo método de variação de parâmetros.

O que se pretende é encontrar uma série da forma:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^{k+s} = (x - x_0)^s \left[C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x + x_0)^2 + \ldots \right],$$

e que represente a solução da E.D. (VII.6.1). Na série (VII.6.2) x_0 é o ponto em torno do qual se deseja a solução, e C_k e s, são constantes que precisam ser determinadas. O procedimento para encontras as soluções da E.D. (VII.6.1) mediante a série (VII.6.2) é chamado de *Método de Frobenius*. Note-se que, quando $s = 0$, a solução é uma simples série de Taylor. Assim, encontrar a solução da E.D. (VII.6.1) em forma de série, equivale, de certa maneira, a fazer a expansão em série de Taylor da solução em si.

Antes de se proceder à descrição do método de Frobenius, é interessante se iniciar uma análise, qualitativa, do tipo de soluções que se deve esperar utilizando a série (VII.6.2). O ponto x_0, em torno do qual se deseja obter a solução, é o parâmetro de maior importância, já que é a única quantidade que liga as características da E.D. (VII.6.1) à forma final da solução. Este ponto é normalmente escolhido em $x_0 = 0$. Isto porque, na quase totalidade dos casos, é sempre procurada uma solução que seja válida num intervalo que contenha o ponto $x = 0$. Em todo caso, e quando se deseja a série-solução em torno de x_0 sempre se pode fazer a mudança $\xi = x - x_0$ na E.D., de onde resulta que a série-solução será em torno de $\xi = 0$.

Pode parecer a priori que, desconhecendo-se a solução, não seja possível saber se x_0 é um ponto analítico, ou singular, da mesma. Entretanto, a condição necessária para a existência das soluções de (VII.6.1) numa determinada região, de acordo com o exposto na subseção 7.5.4.5, é que os coeficientes variáveis $f_k(x)$, da E.D. linear, sejam funções analíticas nesta região. Portanto, se o ponto x_0 é um ponto regular (analítico e unívoco) de todas as funções $f_k(x)$, é evidente que existirão soluções neste ponto. Em outras palavras, o ponto x_0 será, também, um ponto analítico da solução. O ponto, x_0, que é um ponto re gular para todas as funções $f_k(x)$, é chamado de *ponto ordinário* da equação diferencial.

É possível demonstrar que, nas vizinhanças de um ponto ordinário, a E.D. (VII.6.1) apresenta n soluções linearmente independentes.

Pela mesma condição de existência das soluções de (VII.6.1), pode-se inferir que, se x_0 for um ponto singular, de pelo menos uma das funções $f_k(x)$, então, pelo menos uma das soluções será, também, singular neste ponto. Nestes casos, o ponto x_0 é chamado de *ponto singular* da E.D.

Uma pergunta que surge aqui é a seguinte: Se x_0 é um ponto singular da solução, será que é possível se saber que tipo de singularidade (polo, essencial, ponto de ramificação) é esta? Esta pergunta não pode ser respondida mediante uma simples análise da E.D.. Contudo, se x_0 é um polo das funções $f_k(x)$ com as seguintes propriedades:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{n-1}(x) &= (x - x_0)\ f_{n-1}(x) = \text{função analítica em } x = x_0 \\
\Phi_{n-2}(x) &= (x - x_0)^2\ f_{n-2}(x) = \text{função analítica em } x = x_0 \\
&\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\Phi_1(x) &= (x - x_0)^{n-1}\ f_1(x) = \text{função analítica em } x = x_0 \\
\Phi_0(x) &= (x - x_0)^{n}\ f_0(x) = \text{função analítica em } x = x_0
\end{aligned}\right\} \qquad (VII.6.3)$$

então, o ponto x_0 é, chamado de *ponto singular regular* da E.D.. A solução, neste caso, poderá ter em x_0 um polo, um ponto de ramificação ou, inclusive, um ponto regular, dependendo do valor que se obtiver para o parâmetro s, porém, pelo menos uma das soluções neste ponto será finita.

Todos os outros casos de singularidade em x_0, para as funções $f_k(x)$ que não satisfazem as condições (VII.6.3), são chamados de *pontos singulares irregulares* da E.D. e representam pontos essencialmente singulares da solução. O estudo das soluções em torno destes pontos, foge ao enfoque deste Capítulo:

Uma vez que é escolhido o ponto x_0, em torno do qual se quer a expansão em série da solução, podem-se esperar os seguintes valores para o parâmetro s.

Quando x_0 é um ponto ordinário da E.D., então $s = 0$. Este valor garante que a solução seja analítica em $x = x_0$.

Quando x_0 é um ponto singular regular, então s poderá assumir os seguintes valores:

$s = m < 0$ (m inteiro). A solução terá um polo de ordem m em $x = x_0$

$s = \nu$ = número não inteiro. Neste caso, a solução será uma função plurívoca, e o ponto $x = x_0$ é um ponto de ramificação.

O método de resolução, utilizando a série de Frobenius, consiste apenas em uma manipulação algébrica da série (VII.6.2) e suas derivadas, substituídas na E.D. (VII.6.1) visando obter relações que forneçam, primeiro, o valor de s, e depois as relações de recorrência dos coeficientes C_k. Seguem-se exemplos que ilustram o procedimento para se obter soluções de equações diferenciais lineares na forma de séries de potências.

7.6.2 - Solução em Torno de Pontos Ordinários

Se os coeficientes $f_{n-1}(x)$, $f_{n-2}(x)$, ... $f_0(x)$ são funções analíticas no ponto x_0, então, a solução da E.D. (VII.6.1) é dada por

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x - x_0)^k. \qquad \text{(VII.6.4)}$$

Neste caso simples, o problema se reduz à obtenção de uma expressão que relacione os coeficientes C_k entre si. Esta expressão é chamada de *relação de recorrência*, e é obtida da equação resultante da substituição (VII.6.4), e suas derivadas, na E.D. que se deseja resolver.

EXEMPLO 7.46

$$y'' - xy' = 1 .$$

Embora esta equação seja uma linear completa, sabe-se que encontrando as soluções da parte reduzida

$$y'' - xy' = 0,$$

pode-se, sempre, encontrar a solução geral da equação completa (por exemplo, mediante o método de variação de parâmetros). Portanto, a primeira parte do problema consiste em determinar y_1 e y_2 da parte reduzida da equação.

No caso particular deste exemplo, nota-se que a E.D. reduzida é uma de primeira ordem em y', cuja solução é:

$$y' = C_1 \, e^{\frac{1}{2} x^2} ,$$

de onde,

$$y = C_1 \int e^{\frac{1}{2} x^2} \, dx + C_2.$$

Aliás, a E.D. completa, é uma linear de primeira ordem. Observa-se, contudo, que as integrações que se devem efetuar não são nada simples, se se quiser obter uma solução em forma fechada.

O único coeficiente da equação $f_1(x) = - x$ é uma função analítica em todos os pontos do plano complexo z. Logo, a solução em série pode ser obtida, mediante a série (VII.6.4), em torno de qualquer ponto sobre este plano, por exemplo $x_0 = 0$. Assim, a série

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^k = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots , \qquad \text{(VII.6.5)}$$

é apropriada para este caso.

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k\, C_k\, x^{k-1} \qquad\qquad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, C_k\, x^{k-2} .$$

Nota-se que a medida que se deriva a série, os primeiros termos desaparecem sucessivamente, daí o crescimento dos limites inferiores dos somatórios, Substituindo-se estas relações na E.D. reduzida vem,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, C_k\, x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} k\, C_k\, x^k = 0.$$

No primeiro somatório, faz-se a seguinte mudança no índice do somatório

$$k = \ell + 2,$$

isto para que as potências genéricas de x, sejam as mesmas nos dois somatórios. Assim,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 2)\ (\ell + 1)\ C_{\ell+2}\ x^{\ell} + \sum_{k=0}^{\infty} k\ C_k\, x^k = 0\ .$$

Naturalmente, os dois termos podem ser colocados sob o mesmo símbolo de somatório, já que os índices são "mudos".

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k + 1)\ (k + 2)\ C_{k+2} - k\, C_k \right] x^k = 0\ .$$

Agora, para que esta série seja identicamente nula, é necessário que todos os coeficientes, das potências de x, sejam também nulos. Desta maneira,

o coeficiente de x^0: $2\,C_2 - 0 = 0$, de onde tem-se que $C_2 = 0$

o coeficiente de x : $2 \times 3\,C_3 - C_1 = 0$, de onde tem-se que $C_3 = \dfrac{1}{2 \times 3}\, C_1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\ \vdots$

o coeficiente de x^k: $(k + 1)\ (k + 2)\ C_{k+2} - C_k = 0$.

Esta última expressão, fornece a relação procurada

$$C_{k+2} = \frac{k}{(k+1)\,(k+2)}\, C_k, \tag{VII.6.6}$$

e que é chamada de *relação de recorrência*.

Observe-se que, sendo $C_2 = 0$, tem-se como consequência, que

$$C_4 = C_6 = \ldots\ldots = C_{2\ell} = 0 \qquad (\ell = 1, 2, 3, \ldots.)$$

Porém, o coeficiente $C_0 \neq 0$, uma vez que não existe nenhuma relação que determine o seu valor.

Pode-se ver, também, que todos os coeficientes $C_{2\ell+1}$ $(\ell = 1, 2, 3, \ldots)$ podem ser colocados em termos de C_1. Assim:

$$C_3 = \frac{1}{2 \times 3} C_1$$

$$C_5 = \frac{3}{4 \times 5} C_3 = \frac{3}{5!} C_1$$

$$C_7 = \frac{5}{6 \times 7} C_5 = \frac{3 \times 5}{7!} C_1 = \frac{5!!}{7!} C_1 \ ,$$

onde, adotou-se a convensão

$$n!! = n(n-2)\ (n-4)\ \ldots\ldots.\ 5 \times 3 \times 1$$

Pode-se ver que

$$C_{2\ell+1} = \frac{(2\ell-1)!!}{(2\ell+1)!} C_1 \quad ; \ \ell = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

Desta maneira, a série-solução (VII.6.5), fica

$$y(x) = C_0 + C_1 \left[x + \sum_{\ell=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{(2\ell - 1)!!}{(2\ell + 1)!} x^{2\ell + 1} \right].$$

Evidencia-se que esta é a solução geral da parte reduzida da E.D.

O leitor pode verificar que este é o mesmo resultado que se obtém quando a função $e^{1/2\ x^2}$ é desenvolvida em série de Taylor, e logo é integrada a série resultante, de acordo com a solução que fora encontrada no início do exemplo.

É interessante considerar o que teria acontecido se se tivesse utilizado a solução mais geral (VII.6.2), em vez da mais simplificada (VII.6.4). De acordo com as análises qualitativas feitas no início desta seção, deve-se esperar um valor de $s = 0$.

Visando ilustrar este ponto, considere-se a série (VII. 6.2),

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^{k+s} \; ; \quad y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k + s)\, C_k\, x^{k+s-1} \; ;$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k + s)(k + s - 1)\, C_k\, x^{k+s-2}$$

Substituindo-se na E.D., tem-se:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+s)(k+s-1)\, C_k\, x^{k+s-2} - (k+s) C_k\, x^{k+s} \right] = 0,$$

Fazendo-se $k = \ell + 2$, no primeiro termo,

$$\sum_{\ell=-2}^{\infty} (\ell+s+2)(\ell+s+1)\, C_{\ell+2}\, x^{\ell+s} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+s) C_k\, x^{k+s} = 0.$$

Separando-se os dois primeiros termos do primeiro somatório (i.e., $\ell = -2$ e $\ell = -1$), tem-se:

$$s(s-1)\, C_0\, x^{s-2} + (s+1)s\ C_1\, x^{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+s+2)(k+s+1)\, C_{k+2} - \right.$$

$$\left. - (k+s)\, C_k \right] x^{k+s} = 0.$$

Aqui, torna-se a igualar a zero os coeficientes de todas as potências de x. Assim, os coeficientes das duas potências menores de x são:

$$s(s-1)\, C_0 = 0$$

$$s(s+1)\, C_1 = 0.$$

Já que, a priori, não se pode supor que C_0 e C_1 sejam nulos, tem-se que:

$$s(s - 1) = 0$$

$$s(s + 1) = 0.$$

O único valor que satisfaz às duas equações é $s = 0$.

É interessante notar-se que as duas equações que definem o valor de s, no exemplo anterior, foram obtidas igualando-se a zero os coeficientes das duas potências menores (inferiores a $k = 0$) de x. A primeira destas duas equações

$$s(s - 1) = 0,$$

que corresponde à menor potência de x, é chamada de *equação indicial* da E.D.. A outra equação (ou outras, se a E.D. for de ordem superior) é utilizada para se tirar conclusões no que diz respeito aos valores dos coeficientes C_k envolvidos. Detalhes da equação indicial e das propriedades de suas raízes, serão vistas na próxima subseção.

Outros exemplos de solução em série, em torno de pontos ordinários, são apresentados adiante, onde as E.Ds. a serem resolvidas correspondem a equações comumente encontradas na Física.

7.6.3 - Solução em Torno de Pontos Singulares Regulares

Os tipos de E.Ds., encontrados comumente em problemas físicos, em sua maioria, não são de ordem superior à segunda. É por esta razão que estas análises serão limitadas às equações diferenciais de segunda ordem. Mais ainda, já que sempre se pode fazer a mudança de variável $\xi = x - x_0$, a série-solução será encontrada em torno do ponto $x_0 = 0$.

A equação indicial, que corresponde a uma E.D. de segunda ordem, pode ter raízes s_1 e s_2 do seguinte tipo:

a) A diferença entre as duas raizes é tal que, $s_1 - s_2 \neq$ inteiro, (onde $s_1 > s_2$). Neste caso, tem-se duas soluções

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k, \text{e} \quad y_2(x) = x^{s_2} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \qquad \text{(VII.6.7)}$$

soluções que são, evidentemente, independentes.

b) A diferença entre as duas raízes é nula, $s_1 - s_2 = 0$. Ou seja, as duas raízes são iguais. Neste caso, uma das soluções é ainda, dada por

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k .$$

A outra solução, conforme será demonstrado num exemplo (subseção 7.6.3.4) é fornecida por:

$$y_2(x) = \lim_{s \to s_1} \frac{\partial}{\partial s} y(x, s) \qquad \text{(VII.6.8)}$$

onde, $y(x, s)$, é a série de Frobenius,

$$y(x, s) = x^s \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k,$$

porém, com todos os coeficientes C_k colocados em termos do primeiro coeficiente (C_0 ou C_1), pois, conforme poderá ser observado mais tarde, a relação de recorrência é uma função do índice s. Deve ficar claro que o valor numérico de s somente é subsituído na relação (VII.6.8).

c) A diferença entre as duas raízes é tal que $s_1 - s_2 = N$, onde N é um número inteiro positivo ($s_1 > s_2$). Neste caso, a primeira solução é, ainda,

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k .$$

A outra solução pode ser encontrada mediante a relação

$$y_2(x) = \lim_{s \to s_2} \frac{\partial}{\partial s}\left[(s - s_2)\, y(x, s)\right], \qquad \text{(VII.6.9)}$$

onde $y(x, s)$ é, outra vez, a série de Frobenius com todos os coeficientes C_k colocados em termos do primeiro coeficiente (C_0 ou C_1 dependendo do caso). Uma demonstração, embora particularizada, será fornecida na subseção 7.6.3.5.

d) Quando as raízes, s_1 e s_2, da equação indicial, são números complexos, as soluções da E.D sempre podem ser colocadas na forma de variáveis reais, depois de uma simples manipulação algébrica, de uma maneira similar ao feito no exemplo 7.4.1.. Portanto, as soluções para este caso, são encontradas mediante as relações (VII.6.7).

Pode-se demonstrar que as soluções encontradas para todos os casos, do a) ao d), são linearmente independentes. A seguir, serão estudados os três casos mais importantes dos mencionados acima. Todavia, este estudo será feito mediante a aplicação específica a uma E.D. dada, com o intuito de fazer uma análise meticulosa

7.6.3.1 - A Equação Indicial

Considere-se a E.D.

$$xy'' + \lambda y' - y = 0,$$

onde λ é uma constante, cujo valor numérico será escolhido de maneira a ter três casos diferentes.

Observe-se que o ponto $x = 0$, na equação

$$y'' + \frac{\lambda}{x} y' - \frac{1}{x} y = 0,$$

é um ponto singular regular, uma vez que

$$x\, f_1(x) = x \left(\frac{\lambda}{x} \right) = \lambda = \text{função regular em } x = 0$$

$$x^2 f_0(x) = x^2 \left(\frac{1}{x} \right) = - x = \text{função regular em } x = 0.$$

Logo, a solução é da forma

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^{k+s}$$

$$y' = \sum_{k} C_k\, (k + s)\, x^{k+s-1}\ ;\ y'' = \sum_{k} C_k (k+s)(k+s-1) x^{k+s-2}.$$

Substituindo-se $y(x, s)$ e suas derivadas na E.D., tem-se:

$$\sum_{k} C_k \left[(k+s)(k+s-1)\, x^{k+s-1} + \lambda (k+s)\, x^{k+s-1} - x^{k+s} \right] = 0 \,.$$

$$\sum_{k} C_k \left[(k+s)(k+s+\lambda-1)\, x^{k+s-1} - x^{k+s} \right] = 0 \qquad \text{(VII.6.10)}$$

A equação indicial é obtida igualando-se a zero o coeficiente da menor potência de x, na série anterior, que é o termo contendo a potência x^{s-1}.

$$C_0 \left[s(s + \lambda - 1) \right] = 0.$$

Dado que C_0 é uma constante arbitrária, tem-se que:

$$s(s + \lambda - 1) = 0$$

de onde,

$$s_1 = 0 \quad ; \quad s_2 = 1 - \lambda.$$

Dependendo dos valores numéricos de λ, tem-se os três casos seguintes:

$\lambda = \nu$ = número não inteiro	$s_1 = 0,\ s_2 = 1 - \nu$
$\lambda = 1$	$s_1 = s_2 = 0$
$\lambda = N$ = número inteiro > 1	$s_1 = 0,\ s_2 = 1 - N.$

Assim, o problema se encaixa nos três casos principais considerado nos itens a), b) e c), respectivamente.

7.6.3.2 - A Relação de Recorrência

A relação de recorrência é obtida ao se igualar a zero o coeficiente da potência x^{k+s} da série (VII.6.10), a saber:

$$C_{k+1}\,(k + s + 1)(k + s + \lambda) - C_k = 0,$$

de onde

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{(k+s+1)\,(k+s+\lambda)}$$

Pode-se ver que, para este caso, a equação que resulta, ao se igualar a zero o coeficiente da segunda menor potência de (VII. 6.10), é apenas a reprodução da relação de recorrência onde k = 0.

$$C_1 = \frac{C_0}{(s+1)\,(s+\lambda)}$$

$$C_2 = \frac{C_1}{(s+2)(s+\lambda+1)} = \frac{C_0}{(s+1)(s+2)(s+\lambda)(s+\lambda+1)}\ .$$

Multiplicando-se as duas últimas expressões, para C_1 e C_2, tanto o numerador como o denomidador, por s! e $(s + \lambda - 1)!$ onde se su põe que λ é um número inteiro, tem-se que:

$$C_1 = \frac{s!\ (s+\lambda-1)!}{(s+1)!\ (s+\lambda)!} \qquad C_2 = \frac{s!\ (s+\lambda-1)!}{(s+2)!\ (s+\lambda+1)!}\, C_0$$

Pode-se verificar também que,

$$C_3 = \frac{s!\ (s+\lambda-1)!}{(s+3)!\ (s+\lambda+2)!}\, C_0,$$

e assim sucessivamente.

$$C_k = \frac{s!\ (s+\lambda-1)!}{(s+k)!\ (s+\lambda+k-1)!}\, C_0.$$

Portanto,

$$y(x,\ \lambda,\ s) = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s!\ (s+\lambda-1)!}{(s+k)!\ (s+\lambda+k-1)!}\, x^{k+s}. \quad \text{(VII.6.11)}$$

A seguir serão analisados os três casos mencionados anteriormente.

7.6.3.3 - A Diferença $s_1 - s_2$ é um Número Não Inteiro

Suponha-se que $\lambda = \nu$ = número não inteiro. Para este caso, tem-se duas soluções linearmente independentes:

$$y_1(x) = y(x,\ \nu,\ 0)$$

$y_2(x) = y(x, \nu, 1 - \nu)$.

Evidencia-se que, para este caso, a solução (VII.6.11) não pode ser escrita diretamente, uma vez que a definição de fatorial é válida apenas para números inteiros. Assim substituindo-se na série-solução de Frobenius, $s = 0$, $\lambda = \nu$ e utilizando-se as relações de recorrência tem-se a primeira solução:

$$y_1(x) = 1 + \frac{x}{\nu} + \frac{x^2}{2!\,\nu(\nu + 1)} + \frac{x^3}{3!\,\nu(\nu + 1)(\nu + 2)} + \dots\dots\dots\dots$$

(a constante C_0 é irrelevante).

Analogamente, a segunda solução é obtida fazendo-se $s = 1 - \nu$:

$$y_2(x) = x^{1-\nu}\left[1 + \frac{x}{2-\nu} + \frac{x^2}{2!(2-\nu)(3-\nu)} + \frac{x^3}{3!(2-\nu)(3-\nu)(4-\nu)} + \dots\right].$$

É interessante notar que esta solução é uma função plurívoca com o ponto de ramificação em $x = 0$.

A solução geral da E.D é apenas a combinação linear de ambas:

$$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x),$$

onde os coeficientes C_1 e C_2 são as constantes de integração da E.D..

7.6.3.4 - As Raizes s_1 e s_2 são Iguais

Esta situação é encontrada quando $\lambda = 1$. Para este caso as duas raízes da equação indicial são iguais, i.e., $s_1 = s_2 = 0$.

Nesta caso, conforme já foi mencionado, a primeira solução é:

$$y_1(x) = y(x,\ 1,\ 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k!)^2} .$$

Objetivando-se facilitar a análise, define-se o operador diferencial:

$$M = x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 1.$$

Observe-se que,

$$M\ y(x,1,0) = 0.$$

Entretanto, para um valor arbitrário de s,

$$M\ y(x,1,s) \neq 0 .$$

Neste ponto é necessário ressaltar que $y(x,1,s)$ é a série de Frobenius

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \, x^{k+s} ,$$

cujos coeficientes C_k foram calculados mediante a relação (VII.6.10), de onde foram obtidas as relações de recorrência, com a condição de que todos os coeficientes de x^{k+s}, (i.e. C_1, C_2, C_3, etc.) sejam identicamente nulos. Desta maneira, pode-se verificar que, se s for um número arbitrário (de valor diferente do das raízes da equação indicial), o único termo que subsiste, após substituição na E.D., é aquele para $k = 0$. Assim,

$$My(x,1,s) = C_0 [\, s(s+1-1) \,] \, x^{s-1} = C_0 \, s^2 \, x^{s-1} \qquad \text{(VII.6.12)}$$

Este resultado é obtido do único termo que subsiste em (VII.6.10), o qual, se igualando a zero, reproduziria a equação indicial. É evidente que se

$$s = 0, \text{ então } My(x,1,0) = 0.$$

Derivando-se (VII.6.12) em relação ao parâmetro s, e lembrando-se que

$$\frac{\partial}{\partial s} x^s = x^s \, \ln x ,$$

tem-se :

$$\frac{\partial}{\partial s} M\, y(x,1,s) = M \frac{\partial}{\partial s} y\,(x,\,1,\,s) = C_0 s x^{s-1}(2+s\,\ell n\, x)$$

Observe-se que

$$\lim_{s\to 0} M \frac{\partial}{\partial s} y(x,\,1,\,s) = 0,$$

de onde se conclui que a função

$$y_2(x) = \lim_{s\to 0} \frac{\partial}{\partial s} y(x,\,1,\,s), \qquad \text{(VII.6.13)}$$

é, também, solução da E.D.. Logo, a segunda solução é obtida derivando-se (VII.6.11), termo a termo, em relação ao parâmetro s, e depois tomando-se o limite indicado. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial s} y(x,\,1,\,s) = \frac{\partial}{\partial s}\left[x^s\left(1 + \frac{x}{(s+1)^2} + \frac{x^2}{(s+1)^2\,(s+2)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{x^3}{(s+1)^2\,(s+2)^2\,(s+3)^2} + \ldots\ldots\right)\right]$$

Derivando-se termo a termo, vem:

$$\frac{\partial}{\partial s} y(x,\ 1,\ s) = y(x,\ 1,\ s)\ \ell n\, x\ +\ x^s \left[-\ \frac{2x}{(s+1)^3} - \frac{2x^2}{(s+1)^3\,(s+2)^2} - \right.$$

$$\left. -\ \frac{2x^2}{(s+1)^2\,(s+2)^3} - \ldots\ldots \right]$$

$$y_2(x) = \lim_{s \to 0} \frac{\partial}{\partial s} y(x,\ 1,\ s) = y(x,\ 1,\ 0)\,\ell n\, x\ -\ 2x\,(1 + \frac{3}{8} x + \frac{11}{216} x^2 + \ldots)$$

$$y_2(x) = y_1(x)\ \ell n\, x\ -\ 2x\ (1 + \frac{3}{8}\ x\ +\ \frac{11}{216}\ x^2\ +\ \ldots\ldots\ldots\ldots)\ .$$

Note-se que esta solução é também uma função plurívoca, com o ponto de ramificação em $x = 0$. A solução geral é:

$$y(x) = A\,y_1(x) + B\,y_2\,(x)$$

Note-se que a relação (VII.6.13) é a mesma que a (VII. 6.8), que é válida para o caso geral de raizes duplas da equação indicial.

7.6.3.5 - A Diferença $s_1 - s_2$ é um Número Inteiro

Finalmente, considere-se o caso quando λ é um número inteiro, por exemplo $\lambda = 2$.

As raizes da equação indicial

$$s_1 = 0 \quad e \quad s_2 = -1,$$

são tais que, sua diferença $s_1 - s_2 = 1$, é um número inteiro.

A primeira solução vem da relação (VII.6.11) com $\lambda = 2$ e $s = 0$,

$$y_1(x) = y(x, 2, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!\,(k+1)!} .$$

Agora, suponha-se que a outra solução fosse tentada substituindo-se diretamente $\lambda = 2$ e $s = -1$, na relação (VII.6.11). Pode-se ver que isto não é possível, uma vez que o segundo coeficiente (C_1), fica infinito, e com ele todos os restantes. Isto, evidentemente, não faz sentido, especialmente porque nem sequer depende dos valores de x. Portanto, é necessário encontrar uma segunda solução.

O procedimento para encontrar a segunda solução é semelhante ao desenvolvido no caso b).

$$My(x, 2, s) = C_0\,[s(s + 2 - 1)]x^{s-1} = C_0\, s(s+1)\, x^{s-1}. \quad \text{(VII.6.14)}$$

Outra vez, fica evidente que para $s = 0$, tem-se

$$M\,y(x,2,0) = 0,$$

e também, para s = - 1:

$$\mathcal{M}\, y(x,2,-1) = 0.$$

embora neste caso não se obtenha solução.

Observe-se que, se a equação (VII.6.14) for, primeiro, derivada em relação a s, e depois encontrado o limite $s \to 1$, conforme foi feito anteriormente, o resultado não satisfará a equação diferencial. Entretanto, multiplicando-se ambos os membros de (VII.6.14) por (s + 1), vem:

$$\mathcal{M}\,(s+1)\;y(x,2,s) = C_0\, s(s+1)^2\; x^{s-1}$$

$$\lim_{s\to -1} \frac{\partial}{\partial s}\,\mathcal{M}(s+1)\;y(x,2,s) = \lim_{s\to -1} \mathcal{M}\frac{\partial}{\partial s}\left[(s+1)\;y(x,2,s)\right] =$$

$$= C_0 \lim_{s\to -1} x^{s-1}\left[\ell n\, x\; s(s+1)^2 + (s+1)^2 + 2s(s+1)\right] = 0,$$

de onde se tira como conclusão que a função

$$y_2(x) = \lim_{s\to -1} \frac{\partial}{\partial s}\left[(s+1)\;y(x,2,s)\right] \qquad \text{(VII.6.15)}$$

é também solução (de fato, a segunda solução) de E.D.. Assim,

$$(s + 1)\, y(x, 2, s) = x^s \left[s + 1 + \frac{x}{s + 2} + \frac{x^2}{(s + 2)^2\,(s + 3)} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^3}{(s + 2)^2\,(s + 3)^2\,(s + 4)} + \ldots\ldots \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[(s+1)\; y(x, 2, s)\right] = (s + 1)\; y(x, 2, s)\, \ell n\, x +$$

$$+ x^s \left[1 - \frac{x}{(s + 2)^2} - \frac{(3s + 8)\, x^2}{(s+2)^3\;(s+3)^2} - \ldots\right]$$

Finalmente,

$$y_2(x) = \lim_{s \to -1} \frac{\partial}{\partial s}\left[(s+1)\; y(x, 2, s)\right] = \frac{\ell n\, x}{x}\left[x + \frac{x^2}{2 \times 1} + \frac{x^3}{3 \times 2 \times 1} + \ldots\right] +$$

$$+ x^{-1}\left[1 - x - \frac{5}{4} x^2 - \frac{17}{36}\, x^3 - \ldots\ldots\right].$$

$$y_2(x) = \ell n\, x \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right) + x^{-1}\left(1 - x - \frac{5}{4} x^2 - \frac{17}{36}\, x^3 - \ldots\ldots\right) .$$

Evidencia-se que o ponto $x = 0$, é, também, um ponto de ramificação da solução.

A solução geral é obtida da combinação linear das duas soluções encontradas.

Observe-se que a segunda solução encontrada mediante (VII.6.15) corresponde à forma geral (VII.6.9).

7.7 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS CONHECIDAS NA FÍSICA

Nesta seção serão resolvidas as E.Ds. que comumente aparecem em problemas da Física. Muitas destas soluções dão origem a funções com propriedades estabelecidas, conhecida como *Funções Especiais*. O Capítulo seguinte será dedicado ao estudo das funções especiais mais importantes.

7.7.1 - Equação de Legendre

A equação diferencial

$$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + n(n + 1)\, y = 0, \qquad \text{(VII.7.1)}$$

onde n é um número real arbitrário, é conhecida como a E.D. de Legendre. Esta equação é geralmente obtida a partir de E.Ds. parciais, aplicada a geometrias esféricas.

Reescrevendo-se a E.D. (VII.7.1) na forma

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}\, y' + \frac{n(n+1)}{1 - x^2}\, y = 0,$$

pode-se ver que os pontos singulares da E.D. são os $x = \pm 1$. Em outras palavras, o ponto $x = 0$ é um ponto ordinário da E.D., e, portanto, a série-solução, em torno deste ponto, será uma do tipo série de Taylor. Dado que o círculo de convergência, da série de Taylor, vai até à singularidade mais próxima, e observando-se que as singularidades da E.D. de Legendre se encontram no pontos $x = \pm 1$, segue-se que o raio de convergência da série-solução será $|x| < 1$.

A discussão anterior é de extrema importância, na medida que, a priori, pode-se saber o raio de convergência que terá a solução.

Outro fato interessante na E.D.(VII.7.1) é que os pontos $x = \pm 1$ são pontos singulares regulares. Isto implica que se se deseja a solução nas vizinhaças, por exemplo, do ponto $x = \pm 1$, a série-solução será do tipo Frobenius. Neste caso, também, poder-se-ia adiantar que o raio de convergência da série-solução seria $|x| < 2$.

Encontrando-se a solução nas vizinhaças de $x = 0$, tem-se

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \, x^k$$

de onde,

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k \, C_k \, x^{k-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \, C_k \, x^{k-2} \, .$$

Substituindo-se esta relações em (VII.7.1), vem

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, C_k\, x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, C_k\, x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} k\, C_k\, x^k + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^k = 0.$$

A relação de recorrência é obtida igualando-se a zero todos os coeficientes de x^k. Assim,

$$(k+2)(k+1)\, C_{k+2} - \left[k(k-1) + 2k - n(n+1)\right] C_k = 0$$

de onde

$$C_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)}\, C_k \tag{VII.7.2}$$

Observe-se que os coeficientes relacionados são entre os de índices pares e ímpares respectivamente.

$$C_2 = -\frac{n(n+1)}{1 \times 2}\, C_0 = -\, n(n+1)\, \frac{C_0}{2!}$$

$$C_4 = \frac{6 - n(n+1)}{3 \times 4}\, C_1 = -\left[6 - n(n+1)\right] n(n+1)\, \frac{C_0}{4!}$$

$$= (n-2)(n+3)\, n(n+1)\, \frac{C_0}{4!}$$

De maneira similar obtém-se:

$$C_6 = - (n + 5)\ (n + 3)\ (n + 1)\ n(n - 2)\ (n - 4)\ \frac{C_0}{6!}\ , \text{ etc.}$$

Por outro lado,

$$C_3 = \frac{2 - n(n + 1)}{2 \times 3}\ C_1 = - (n - 1)\ (n + 2)\ \frac{C_1}{3!}$$

$$C_5 = (n - 1)\ (n - 3)\ (n + 4)\ (n + 2)\ \frac{C_1}{5!}$$

$$C_7 = - (n - 1)\ (n - 3)\ (n - 5)\ (n + 6)\ (n + 4)\ (n + 2)\ \frac{C_1}{7!}$$

etc.

Portanto, a solução geral da E.D. de Legendre fica:

$$y(x, n) = C_0 \left[1 - n(n + 1)\ \frac{x^2}{2!} + n(n-2)(n+3)\ (n + 1)\ \frac{x^4}{4!} \ldots \right] +$$

$$+ C_1 \left[x - n(n-1)\ (n+2) \frac{x^3}{3!} + (n-1)(n-3)(n+4)(n+2)\ \frac{x^5}{5!} - \ldots . \right]$$

Chama-se a atenção para alguns aspectos interessantes desta solução (VII.7.3). O primeiro é o relacionado com a convergência (ou, mais apropriadamente, o círculo de convergência) das duas séries que aparecem na solução. Fazendo-se a análise de convergência, através do teste de comparação por quociente, onde pode ser utilizada a relação de recorrência, verifica-se que o raio de convergência de ambos as séries, é $|x| < 1$. Este resultado, de certa maneira, justifica a análise qualitativa feita no início desta subseção. Consequentemente, a região de validez da solução (VII.7.3), sobre o eixo real, é : $- 1 < x < 1$.

Outro aspecto interessante da solução (VII.7.3) é no que diz respeito ao valor numérico de n. Observe-se que se n for um número inteiro (positivo ou negativo), uma das séries converte-se num polinômio. Por exemplo, se $n = 6$, é evidente que todos os coeficientes de potências superiores a x^6 se anulam, devido ao fator $(n - 6)$, comum para todos eles. Portanto, a primeira série converte-se num polinômio de 6º grau, embora a outra série continue a ser infinita. Pode-se ver que efeitos similares são produzidos para valores negativos ímpares na primeira série, e para valores ímpares positivos e pares negativos, na segunda série.

A importância de valores inteiros de n, fica evidente depois da observação que se segue. Tendo-se duas (séries) soluções, pode-se escolher sempre aquela que satisfaça determinadas condições físicas, ou de contorno, do problema. Assim, se as restrições do problema exigem uma solução finita em $x = \pm 1$, obviamente, dever-se-ao escolher números inteiros para n, e utilizar-se como solução apenas o polinômio. Esta situação acontece em problema envolvendo geométrias esféricas, onde comumente $x = \cos\theta$, e de cuja aplicação surgem os polinômios de Legendre $P_n(x)$. O estudo destes polinomios, e de suas propriedades, é um dos temas do Capítulo seguinte.

7.7.2 - Equação de Bessel

A equação diferencial

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2) y = 0, \qquad \text{(VII.7.4)}$$

é conhecida como a E.D. de Bessel. Esta E.D. aparece em problemas relacionados com geometrias cilíndricas.

Observe-se que os coeficientes variáveis da E.D. (VII.7.4),

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f_0(x) = 1 - \frac{m^2}{x^2},$$

são funções singulares no ponto $x = 0$. Porém, verifica-se que as funções

$$x f_1(x) = 1 \quad \text{e} \quad x^2 f_0(x) = x^2 - m^2,$$

são regulares neste ponto, revelando que $x = 0$ é um ponto singular regular da E.D. de Bessel. Portanto, a solução será do tipo

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \, x^{k+s} .$$

Substituindo-se esta solução na E.D. de Bessel, vem

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left[(k+s)(k+s-1) + k+s+x^2-m^2\right] x^{k+s} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left[(k+s)^2 + x^2 - m^2\right] x^{k+s} = 0 \qquad \text{(VII.7.5)}$$

A equação indicial vem do coeficiente de x^s, que é a menor potência da série. Assim.

$$C_0 \, (s^2 - m^2) = 0,$$

de onde

$$s = \pm\, m. \qquad \text{(VII.7.6a)}$$

Observe-se que o resultado que se obtém ao se igualar a zero o coeficiente da segunda menor potência de x, ainda não faz parte da relação de recorrência, pois

$$C_1 \left[(s+1)^2 - m^2\right] = 0.$$

Nesta relação, se o colchete for nulo, ter-se-ã que $s = \pm m - 1$. Este resultado ẽ conflitante com (VII.7.6a). Por esta razão conclui-se que

$$C_1 = 0 \tag{VII.7.6b}$$

A relação de recorrência ẽ obtida como de costume

$$C_k \left[(k + s)^2 - m^2 \right] + C_{k-2} = 0, \tag{VII.7.7}$$

de onde,

$$C_2 = - \frac{C_0}{(s + 2)^2 - m^2}$$

$$C_4 = \frac{C_0}{\left[(s + 2)^2 - m^2\right] \left[(s + 4)^2 - m^2\right]}$$

$$C_6 = \frac{- C_0}{\left[(s + 2)^2 - m^2\right] \left[(s + 4)^2 - m^2\right] \left[(s + 6)^2 - m^2\right]}$$

etc.

Evidencia-se que

$$C_1 = C_3 = C_5 = \ldots\ldots\ldots = C_{2\ell + 1} = 0.$$

Portanto,

$$y(x,s,m) = C_0\, x^s \left\{ 1 - \frac{x^2}{\left[(s+2)^2 - m^2 \right]} + \frac{x^4}{\left[(s+2)^2 - m^2 \right] \left[(s+4)^2 - m^2 \right]} \right\}$$

(VII.7.8)

A seguir, será analisada a natureza das soluções quanto aos valores numéricos do parâmetro m, e portanto, das raízes da equação indicial.

Quando $m = \nu$ é um número não inteiro. Neste caso, as soluções correspondentes são determinadas pelas raizes da equação indicial $s = \pm\, \nu$.

Assim, as duas soluções são respectivamente,

$$y_1(x,\, \nu) = y(x,\, \nu,\, \nu) = x^{\nu} \left[1 - \frac{x^2}{2^2\, (\nu + 1)} + \right.$$

$$+ \frac{x^4}{2^4 \times 2!\, (\nu + 1)\, (\nu + 2)} \quad -$$

$$\left. - \frac{x^6}{2^6 \times 3!\, (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \ldots \right] \qquad \text{(VII.7.9)}$$

$$y_2(x, \nu) = y(x, -\nu, \nu) = x^{-\nu}\left[1 + \frac{x^2}{2^2(1-\nu)} + \frac{x^4}{2^4 \times 2!(1-\nu)(2-\nu)} - \frac{x^6}{2^6 \times 3!(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)} + \ldots\ldots\right]$$

(VII.7.10)

Observe-se que ambas as soluções são funções plurívocas.

Quando $m = n$ é um número inteiro. Neste caso a diferença

$$s_1 - s_2 = n + n = 2n,$$

é um número inteiro, de onde se tem que a primeira solução corresponde a $s = n$ (a qual resulta ser da mesma forma que a (VII.7.9), onde ν é substituido por n:

$$y_1(x, n) = y(x, n, n) = x^n\left[1 - \frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{n!}{2!(n+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{n!}{3!(n+3)!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots\right] \quad \text{(VII.7.11)}$$

Pode-se verificar que as séries dentro dos colchetes, nas equações de (VII.7.9) à (VII.7.11), têm um raio de convergência infinito. As séries-soluções (VII.7.9), (VII.7.10) e (VII.7.11) são conhecidas como *funções de Bessel* $J_m(x)$.

A segunda solução, quando m é um número inteiro, corresponderia a substituir ν por n na relação (VII.7.10). Porém, conforme foi apontado na seção anterior, esta operação conduz a uma solução (infinita) que não faz sentido, uma vez que independe dos valores da variável x.

Assim, e como um segundo exemplo de raízes da equação indicial cuja diferença é um número inteiro, encontrar-se-á a segunda solução da E.D. de Bessel. Para isto, define-se o operador diferencial de Bessel

$$\mathcal{B} = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - m^2) \qquad \text{(VII.7.12)}$$

tal que

$$\mathcal{B}\, y(x,n,n) = 0 \ .$$

Porém,

$$\mathcal{B}\ y(x,s,n) \ = \ C_0 x^s \,(s^2 - n^2), \qquad \text{(VII.7.13)}$$

isto, porque os coeficientes C_2, C_4, ... etc., foram calculados sob a condição de que todos os coeficientes das potências da série (VII.7.5), que em essência representa (VII.7.13), sejam nulos. Multiplicando-se (VII.7.13) por (s + n) e derivando-se ambos os membros em relação ao parâmetro s, tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{B}\,(s+n)\;\; y(x,s,n) \;=\; C_0\,\frac{\partial}{\partial s}\, x^s\,(s+n)(s^2-n^2) \;=\; C_0\, x^s$$

$$\left[(s+n)(s^2-n^2)\,\ell n\, x + (s^2-n^2) + 2s(s+n)\right]$$

Evidencia-se que, no limite quando $s \to -n$, esta expres são

$$\lim_{s\to -n} \mathcal{B}\,\frac{\partial}{\partial s}\left[\,(s+n)\;\; y(x,s,n)\,\right] = 0,$$

revela que a função

$$y_2(x,n) \;=\; \lim_{s\to -n} \frac{\partial}{\partial s}\left[\,(s+n)\;\; y(x,s,n)\,\right], \qquad \text{(VII.7.14)}$$

é outra solução da E.D. de Bessel.

EXEMPLO 7.47

Seja a E.D

$$x\,y'' + y' + xy = 0.$$

Observa-se que esta equação corresponde à de Bessel (VII. 7.4) com $m = 0$. As raízes da equação indicial, segundo (VII.7.6a), são duplas, i.e.,

$$s_1 = s_2 = 0$$

Portanto, uma das soluções é dada por (VII.7.11)

$$y_1(x) = 1 + (\frac{x}{2})^2 - \frac{1}{(2!)^2}(\frac{x}{2})^4 + \frac{1}{(3!)^2}(\frac{x}{2})^6 - \frac{1}{(4!)^2}(\frac{x}{2})^8 + \ldots$$

Esta solução é comumente chamada de *função de Bessel de ordem zero*, e é designada por $J_0(x)$. Assim,

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} (\frac{x}{2})^{2k} .$$

A outra solução é dada pela relação (VII.6.8)

$$y_2(x) = \lim_{s \to 0} \frac{\partial}{\partial s} y(x, s, 0),$$

onde

$$y(x, s, 0) = x^s \left[1 - \frac{x^2}{(s+2)^2} + \frac{x^4}{(s+2)^2 (s+4)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^6}{(s+2)^2 (s+4)^2 (s+6)^2} + \ldots \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial s} y(x, s, 0) = y(x, s, 0)\, \ell n\, x + 2x^s \left[\frac{x^2}{(s+2)^3} - \frac{2(s+3)}{(s+2)^3\,(s+4)^3} x^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{3s^2 + 24s + 44}{(s+2)^3\,(s+4)^3\,(s+6)^3} x^6 - \ldots\ldots\ldots \right]$$

$$y_2(x) = y_1(x)\, \ell n x + 2 \left(\frac{x^2}{2^3} - \frac{6\,x^4}{2^3 \times 4^3} + \frac{44x^6}{2^3 \times 4^3 \times 6^3} - \ldots \right)$$

$$y_2(x) = y_1(x)\, \ell n x + \frac{x^2}{4} - \frac{6}{(4!!)^3} x^4 + \frac{44}{(6!!)} x^6 - \ldots.$$

Esta solução é basicamente a *função de Neuman de ordem zero*, que normalmente é adotada como segunda solução da equação de Bessel.

7.7.3 - Equação Hipergeométrica

Outra E.D. de importância nas aplicações é:

$$x(1 - x)y'' + \left[\gamma - (\alpha + \beta + 1)\, x \right] y' - \alpha\beta y = 0 \qquad \text{(VII.7.15)}$$

onde α, β e γ são constantes.

A importância desta E.D, é que a solução de outras E.Ds., comuns na Física, podem ser expressas em termos da solução de (VII.7.15).

Pode-se verificar que os pontos $x = 0$ e $x = 1$, são pontos singulares regulares da equação hipergeométrica. Apesar de não ser evidente, o ponto $x = \infty$, é também uma singularidade da E.D.,

Ao analisar as propriedades do *ponto no infinito* para a E.D. hipergeométrica, faz-se a troca de variável

$$x = \frac{1}{\xi} .$$

Pode-se verificar que

$$\frac{dy}{dx} = -\xi^2 \frac{dy}{d\xi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\xi^3 \frac{dy}{d\xi} + \xi^4 \frac{d^2y}{d\xi^2}$$

Substituindo-se estas relações na E.D. hipergeométrica, tem-se

$$\xi^2(1-\xi) \frac{d^2y}{d\xi^2} + \left[2(1-\xi) + \gamma\xi - (\alpha+\beta+1)\right] \xi \frac{dy}{d\xi} + \alpha\beta y = 0$$

Observe-se que o ponto $\xi = 0$ (isto é, $x = \infty$) é um ponto singular regular da E.D. Este fato permite encontrar a solução da equação hipergeométrica para valores de x muito grandes, o que acontece quando a solução é expressa em forma de série, nas vizinhaças de $\xi = 0$.

A solução de (VII.7.15) nas vizinhaças de $x = 0$, é encontrada da maneira conhecida. A equação indicial:

$$s(s + \gamma - 1) = 0,$$

tem as raízes

$$s_1 = 0 \quad e \quad s_2 = 1 - \gamma.$$

Portanto, a primeira solução é da forma:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \, x^k \tag{VII.7.16}$$

A série (VII.7.16), quando substituida na E.D hipergeométrica, conduz à seguinte relação de recorrência:

$$(k + 1)(k + \gamma) \; C_{k+1} = (k + \alpha)(k + \beta) \; C_k,$$

ou, de uma forma mais conveniente, substituindo-se k por k - 1, tem-se que

$$k(k+\gamma-1)\,C_k = (k+\alpha-1)(k+\beta-1)C_{k-1}.$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
(k-1)(k+\gamma-2)\,C_{k-1} &= (k+\alpha-2)(k+\beta-2)\,C_{k-2}\\
&\vdots\\
2(1+\gamma)\,C_2 &= (1+\alpha)(1+\beta)\,C_1\\
\gamma\,C_1 &= \alpha\beta\,C_0.
\end{aligned}$$

Multiplicando-se membro a membro, todas estas relações, vem:

$$1\times 2\times 3\times \ldots .(k-1)\;k\gamma\,(\gamma+1)(\gamma+2)(\ldots\ldots.)(k+\gamma-2)(k+\gamma-1)C_k =$$

$$= \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\ldots .)(k+\alpha-2)(k+\alpha-1)\;\beta(\beta+1)(\beta+2)(\ldots .)(k+\beta-2)\,(k+\beta-1)\,C_0$$

Esta relação pode ainda ser escrita de uma maneira mais simplificada, definindo o que será chamado de *"produtório"*.

$$\prod_{\ell=0}^{n} \Phi(\ell) = \Phi(0)\,\Phi(1)\,\Phi(2)\,\ldots\ldots\,\Phi(n-1)\,\Phi(n) \qquad \text{(VII.7.17)}$$

onde se pode ver que o fatorial $m! = \prod_{\ell=1}^{m}$ é um caso particular de (VII. 7.17). Assim, a relação entre C_k e C_0, fica:

$$\frac{C_k}{C_0} = \frac{\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha+\ell)\prod_{\ell=0}^{k-1}(\beta+\ell)}{k!\prod_{\ell=0}^{k-1}(\gamma+\ell)} = \frac{\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha+\ell)(\beta+\ell)}{k!\prod_{\ell=0}^{k-1}(\gamma+\ell)}$$

Desta maneira, a solução que corresponde à raiz $s_1 = 0$, é:

$$y_1(x, \alpha, \beta, \gamma) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha+\ell)\,(\beta+\ell)}{k!\prod_{\ell=0}^{k-1}(\gamma+\ell)}\, x^k \,.$$

Note-se que esta solução não faz sentido quando γ é zero ou inteiro negativo.

Esta solução é comumente caracterizada, utilizando-se a notação.

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha+\ell)(\beta+\ell)}{k!\prod_{\ell=0}^{k-1}(\gamma+\ell)}\, x^k = F(\beta, \alpha, \gamma, x) \qquad \text{(VII.7.18)}$$

Onde os dois primeiros parâmetros α e β correspondem ao numerador e o terceiro γ ao denominador. Observe-se que se $\beta = \gamma$

$$F(\alpha,\ \beta;\ \beta;x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\ \prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha+\ell)\ \frac{x^k}{k!} \qquad \text{(VII.7.19)}$$

Mais ainda, quando nesta última expressão $\alpha = 1$, tem-se

$$F(1,\ \beta;\ \beta;\ x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \text{(VII.7.20)}$$

Observa-se que a solução da E.D. é uma série geométrica. É devido a este fato que a solução (VII.7.18) é chamada de *função hipergeométrica*.

A segunda solução para o caso de $1 - \gamma$ não ser um número inteiro, pode ser obtida seguindo-se o procedimento normal. Porém, visando-se resultados que se relacionam com (VII.7.18), é conveniente procurar uma solução da forma

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}\ u(x). \qquad \text{(VII.7.21)}$$

Substituindo-se esta solução na E.D. hipergeométrica, vem:

$$x(x-1)u'' + \left[(\alpha+\beta-2\gamma+3)\ x + \gamma - 2\right]u' + (\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)u = 0 \qquad \text{(VII.7.22)}$$

Comparando-se (VII.7.15) com (VII.7.22), observa-se que as duas E.Ds. são idênticas quando α,β e γ são substituidos por $(\alpha-\gamma+1)$, $(\beta-\gamma+1)$ e $(2-\gamma)$, respectivamente. Portanto a solução de (VII.7.22) é

$$u(x) = F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1;\ 2 - \gamma;\ x),$$

de onde se segue que a segunda solução procurada é:

$$y_2(x, \alpha, \beta, \gamma) = x^{1-\gamma}\ F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1;\ 2 - \gamma;\ x), \qquad \text{(VII.7.23)}$$

para $\gamma \neq 1$.

É interessante notar que a série-solução (VII.7.18) converte-se em polinômios quando α, ou β são números inteiros negativos.

EXEMPLO 7.48

Seja a E.D. de Legendre,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

Fazendo-se a troca de variáveis

$$x = 1 - 2\xi,$$

a E.D. de Legendre, fica:

$$\xi(1 - \xi)\ \frac{d^2y}{d\xi^2} + (1 - 2\xi)\ \frac{dy}{d\xi} + n(n + 1)y = 0.$$

Comparando-se esta equação com a E.D. hipergeométrica, identifica-se que

$$\gamma = 1, \ \alpha + \beta = 1 \qquad e \qquad \alpha\beta = - n(n + 1)$$

de onde se tem que

$$\alpha = - n, \quad \beta = n + 1$$

(as outras raizes: $\alpha = n + 1$ e $\beta = - n$, conduzem ao mesmo resultado). Portanto, a solução da E.D de Legendre, (a primeira) pode ser escrita em termos da função hipergeométrica:

$$y(1 - 2\xi, n) = F(- n, n + 1; 1, \xi),$$

ou, também,

$$y_1(x, n) = F(-n, n + 1; 1; \frac{1 - x}{2}).$$

Note-se que esta solução é uma série desenvolvida nas vizinhanças do ponto x = 1, razão pela qual não pode ser comparada diretamente à solução obtida anteriormente. Porém, ambas as séries convergem uniformemente dentro da região de convergência comum às duas.

A outra solução, neste caso, deve ser obtida pelo critério de raízes duplas da equação indicial, pois $\gamma = 1$.

7.7.4 - Equação de Laguerre

$$x y'' + (1 - x) y' + n y = 0 \qquad \text{(VII.7.24)}$$

O ponto x = 0 é singular regular. Pode-se verificar que as raízes de equação indicial são $s_1 = s_2 = 0$. Logo, a solução será uma série de Taylor. A relação de recorrência fica então

$$k^2 C_k = - (n - k + 1) C_{k-1}, \qquad \text{(VII.7.25)}$$

de onde, por aplicação sucessiva desta regra, se tem:

$$\frac{C_k}{C_0} = \frac{(-1)^k\, n(n-1)(n-2)(\ldots\ldots)(n-k+2)(n-k+1)}{\left[k(k-1)(k-2)(\ldots.) \times 3 \times 2 \times 1\right]^2} =$$

$$= (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!\,(k!)^2}.$$

Observa-se que se n for um número inteiro positivo a série infinita converte-se num polinômio. Daí os *polinômios de Leguerre* $L_n(x)$. Supondo-se que n seja um número inteiro positivo, a relação dos coeficientes pode ser colocada na forma

$$\frac{C_k}{C_0} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!\,(k!)^2} = (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!} \quad ,$$

onde, no último membro, foi utilizada a notação combinatória dos coeficientes de Newton. com estes resultados, uma das soluções fica

$$y(x, n) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!} \; . \tag{VII.7.26}$$

Se n fosse um número negativo ou um número não-inteiro, (VII.7.26) seria uma série infinita.

A segunda solução da equação de Laguerre (VII.7.24) pode ser obtida mediante a aplicação de (VII.6.8), uma vez que se tem o caso de raízes duplas da equação indicial.

7.7.5 - Equação de Shrödinger. Equação de Hermite

Considere-se a E.D.

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (e - x^2)\,\Psi = 0. \tag{VII.7.27}$$

Esta E.D. é chamada na mecânica quântica, de *equação de Shrödinger* independente do tempo para o oscilador harmônico. Nesta equação, a grandeza $|\Psi|^2\,dx$ significa a probabilidade de que uma partícula, de massa m e energia E ($e = \frac{2E}{\hbar\omega}$, ω = frequência de oscilação, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h = constante de Planck), que se encontra dentro de um campo de potencial $V(x) = \frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2$, seja localizada entre x e x + dx. A equação (VII.7.27) é comumente conhecida como a equação do *oscilador harmônico*.

Procura-se uma solução de (VII.7.27) de maneira que $\Psi(x = \pm \infty) = 0$. Isto é, não existe nenhuma probabilidade de que a partícula se encontre no infinito. Observe-se, no entanto, que o ponto no infinito é uma singularidade muito forte da E.D. de Schrodinger. O procedimento a ser seguido, para encontrar as soluções, será aquele que permite isolar o comportamento da solução em torno da singularidade. Em outras palavras, primeiro tentar-se-á encontrar as soluções de (VII.7.27) para valores de x muito grandes e depois, com base nesta soluções, encontrar aquela que satisfaça as condições de contorno.

Assim, para x muito grande ($x^2 >> e$), tem-se:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - x^2 \Psi \simeq 0. \qquad \text{(VII.7.28)}$$

Resolvendo-se esta equação para um intervalo $x_1 < x < x_2$, onde x_1 e x_2 são valores muito grandes, porém $\frac{x_1 - x_2}{x_1} << 1$, segue-se que x, dentro deste intervalo, permanece aproximadamente constante. Logo, sua solução será do tipo:

$$\Psi \sim e^{mx}.$$

Substituindo-se esta função em (VII.7.28) vem

$$m^2 - x^2 \simeq 0,$$

de onde $m = \pm x$, ou melhor: $m = \pm ax$. Aqui, o coeficiente a, foi introduzido de maneira a satisfazer condições (ainda desconhecidas) para que a função,

$$\Psi \sim e^{\pm ax^2},$$

seja a solução de (VII.7.28).

Assim, substituindo-se em (VII.7.28), tem-se:

$$\Psi'' - x^2 \Psi = \pm 2a (1 \pm 2ax^2) \Psi - x^2 \Psi$$

$$= (\pm 2a + 4a^2 x^2 - x^2) \Psi.$$

Para que Ψ seja solução de (VII.7.28), escolhe-se o parâmetro a, de maneira que

$$\pm 2a + 4a^2 x^2 - x^2 = 0.$$

O primeiro termo desta equação é desprezível em relação aos outros. Logo, $a = \dfrac{1}{2}$.

Portanto, o comportamento (assintótico) das soluções, nas vizinhanças do ponto no infinito, é:

$$\underset{+\infty}{\Psi} \sim e^{+\frac{1}{2}x^2} \quad \text{e} \quad \underset{-\infty}{\Psi} \sim e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

É evidente que, somente a segunda solução satisfaz $\Psi(\pm\infty) = 0$. Extraído este comportamento da E.D. no infinito, a solução da E.D. do oscilador, será da forma:

$$\Psi(x) = y(x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad \text{(VII.7.29a)}$$

onde a função y(x), substituindo-se (VII.7.29a) na E.D. de Schrödinger (VII.7.27), deve satisfazer:

$$y'' - 2xy' + (e - 1)\, y = 0.$$

Chamando-se $e - 1 = 2n$, tem-se mais uma E.D. conhecida.

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \qquad \text{(VII.7.30)}$$

Esta é a E.D. de Hermite e que apresenta singularidade apenas no infinito. Sua solução em série de potências é, portanto, uma série de Taylor.

Pode-se verificar que a relação de recorrência, entre os coeficientes da série, é a seguinte:

$$k(k-1)\, C_k = -2(n - k + 2)\, C_{k-2} \qquad \text{(VII.7.31)}$$

Evidencia-se que os coeficientes de subíndices pares, e os de ímpares, se encontram relacionados entre si. Assim para os coeficientes de subíndices pares, a relação (VII.7.31) pode ser escrita na forma:

$$2k(2k-1)\,C_{2k} = -2(n-2k+2)\,C_{2k-2} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Utilizando-se esta relação repetidamente para $k-1$, $k-2$ etc., e multiplicando-se membro a membro todas as expressões resultantes, tem-se que:

$$\frac{C_{2k}}{C_0} = \frac{(-1)^k}{k!\,(2k-1)!!}(n-2k+2)(n-2k+4)(\ldots)(n-2)n,$$

ou de maneira mais compacta:

$$\frac{C_{2k}}{C_0} = \frac{(-1)^k}{k!\,(2k-1)!!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(n-2\ell), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

De uma maneira similar, para os coeficientes de subíndices ímpares, tem-se que:

$$\frac{C_{2k+1}}{C_1} = \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)!!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(n-2\ell-1) \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Desta maneira, a solução da E.D. de Hermite, fica:

$$y(x,n) = C_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(2k-1)!!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(n-2\ell)\,x^{2k}\right] +$$

$$+\,C_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)!!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(n-2\ell-1)\,x^{2k+1}\right] \qquad \text{(VII.7.32)}$$

Esta solução fica sendo a soma de duas séries infinitas, quando o parâmetro n é um número não-inteiro ou um inteiro negativo. Quando n é um inteiro positivo, uma das séries trunca-se num polinômio, conforme pode-se verificar na relação (VII.7.32). Desta maneira, para o caso de n ser um número inteiro, a solução da E.D. de Hermite pode ser expressa em termos de apenas um polinômio, de uma maneira análoga ao caso das soluções da E.D de Legendre. Soluções deste tipo dão origem aos *polinômios de Hermite* $H_n(x)$.

Esta última observação tem uma importância especial no que diz respeito à solução da equação de Schrödinger, uma vez que

$$\Psi\,(x) = H_n\,(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \text{(VII.7.29b)}$$

onde se pode ver que $\Psi(\infty) = 0$. Portanto, esta solução satisfaz plenamente à equação de Schrödinger.

A história é diferente para valores de n que não sejam inteiros positivos, isto devido aos problemas de convergência das séries (VII.7.32). Do teste da comparação por quociente vem que,

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{C_{k+2}\, x^{k+2}}{C_k\, x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{-2\,(n-k)}{(k+2)(k+1)}\, x^2 \right| ,$$

onde devem ser considerados dois casos, a saber.

a) valores moderados de $|x|$. Neste caso

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{C_{k+2}}{C_k} x^2 \right| = 0,$$

ou seja, a série converge em todos os pontos que se encontram a distâncias finitas da origem no plano complexo x.

b) valores muito grandes de $|x|$. Este é o caso que realmente preocupa, uma vez que está incluido o ponto no infinito. Fica evidente que

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{C_{k+2}}{C_k} x^2 \right| \simeq \lim_{k \to \infty} \left| \frac{2}{k} x^2 \right| = \infty$$

Acontece que este tipo de convergência é o mesmo que a convergência da função

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!},$$

pois,

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{k!}{(k+1)!} x^2 \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{1}{k} x^2 \right| .$$

Isto significa que as séries (VII.7.32), para x muito grande, comportam-se como $y(x) \sim e^{x^2}$.

Assim, a solução da equação de Schrödinger, ficaria:

$$\Psi\ (x) \sim e^{x^2}\ e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}}\ (?)$$

Evidentemente esta solução não interessa, porque é divergente no infinito.

Desta maneira, conclui-se que, soluções satisfatórias para a equação de Schrödinger só existem para valores inteiros positivos do parâmetro $n = \dfrac{e - 1}{2}$, i.e., nas soluções (VII.7.32) os valores possíveis para $e = 2n + 1$ (com $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) são "quantizados".

7.7.6 - Equação Associada de Legendre

A seguir, ver-se-á outro caso de solução onde se isola a solução em torno de uma singularidade, da mesma maneira feita com a equação de Schrödinger, só que agora a singularidade se encontra num ponto finito. A equação

$$(1 - x^2)\ y'' - 2\,xy' + \left[n(n + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right] y = 0, \qquad \text{(VII.7.33)}$$

é conhecida como a *E.D. Associada de Lengendre*. Evidencia-se que quando $m = 0$ recupera-se a E.D de Legendre. Uma inspeção da equação (VII. 7.33) revela que o ponto $x = 0$, é um ponto ordinário, e que $x = \pm 1$ são pontos singulares regulares da E.D.. Portanto, a convergência da serie -solução, nas vizinhanças de $x = 0$, será no intervalo $-1 < x < 1$.

Objetivando-se ter soluções finitas nos pontos $x = \pm 1$, encontrar-se-á o comportamento da solução nas vizinhanças destes pontos. Para isto, faz-se a troca de variável

$$x = \pm 1 + \xi, \qquad \text{(VII.7.34)}$$

onde $|\xi| << 1$. Substituindo-se esta nova variável na equação (VII.7.33) e considerando-se que, $1 - x^2 \simeq \mp 2\xi$, vem

$$\mp 2\xi y'' - 2(\xi \pm 1)y' + \left[n(n+1) \pm \frac{m^2}{2\xi} \right] y \simeq 0.$$

Aqui, deve-se observar ainda que

$$n(n+1) \pm \frac{m^2}{2\xi} \simeq \pm \frac{m^2}{2\xi},$$

e também $\xi \pm 1 \simeq \pm 1$. Assim, com esta aproximações, a E.D. fica:

$$\xi^2 y'' + \xi y' - \frac{m^2}{4} y \simeq 0.$$

Esta nova E.D. é do tipo Euler, com soluções da forma $y = \xi^r$. Substituindo-se esta solução na E.D. de Euler, encontra-se que $r = \pm \frac{m}{2}$. Portanto, as soluções são

$$y_1 = \xi^{\frac{m}{2}} \text{ e } y_2 = \xi^{-\frac{m}{2}} .$$

Destas duas soluções, a única que interessa (finita em $\xi = 0$), para valores positivos de m é y_1. Logo, o comportamento desejado da solução nas vizinhaças dos pontos $x = \pm 1$, é:

$$y_- = (1 + x)^{m/2} \quad , \quad y_+ = (1 - x)^{m/2} .$$

A seguir, procurar-se-á uma solução da E.D. (VII.7.33) que inclua o comportamento encontrado em ambas as singularidades.

$$y(x) = (1 + x)^{m/2} (1 - x)^{m/2} v(x) = (1 - x^2)^{m/2} v(x). \quad \text{(VII.7.35)}$$

Substituindo-se esta solução na E.D. (VII.7.33), tem-se a equação que v(x) tem a satisfazer:

$$(1 - x^2)\, v'' - 2(m+1)\, x\, v' + [n(n+1) - m(m+1)]\, v = 0 \quad \text{(VII.7.36)}$$

Procurando-se a solução desta equação, em série de potências em torno do ponto ordinário $x = 0$, encontra-se a relação de recorrência seguinte:

$$k(k-1)\,C_k = \left[(k+m-2)(k+m-1) - n(n+1)\right] C_{k-2}$$

ou rearranjando-se

$$k(k-1)\,C_k = (k+m-n-2)(k+m+n-1)\,C_{k-2}\ .$$

Esta fórmula de recorrência pode ser escrita, para subíndices pares, na forma:

$$2k(2k-1)C_{2k} = (m-n+2k-2)(m+n+2k-1)C_{2k-2} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Como antes, a relação entre os coeficientes C_{2k} e C_0 pode ser obtida escrevendo-se, sucessivamente, a relação anterior para $k-1$, $k-2$ etc., e depois multiplicando-se todas estas expressões membro a membro. O resultado é:

$$\frac{C_{2k}}{C_0} = \frac{\prod\limits_{\ell=1}^{k} (m-n+2\ell-2)(m+n+2\ell-1)}{2^k\, k!\, \prod\limits_{\ell=1}^{k} (2\ell-1)}\ , \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

De uma maneira análoga, tem-se que a relação entre C_{2k+1} e C_1, é:

$$\frac{C_{2k+1}}{C_1} = \frac{\prod\limits_{\ell=1}^{k} (m-n+2\ell-1)(m+n+2\ell)}{2^k\, k!\, \prod\limits_{\ell=1}^{k} (2\ell+1)} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots..$$

Assim, a solução da E.D. (VII.7.36), fica

$$v(x, m, n) = C_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{\ell=1}^{k} (m - n + 2\ell - 2)(m + n - 2\ell - 1)}{(2k)!} x^{2k} \right] +$$

$$+ C_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{\ell=1}^{\infty} (m - n + 2\ell - 1)(m + n + 2\ell)}{(2k + 1)!} x^{2k + 1} \right]$$

onde já foram substituidas as identidades

$$2^k\, k! \prod_{\ell=1}^{k} (2\ell - 1) = (2k)!, \quad \text{e} \quad 2^k\, k! \prod_{\ell=1}^{k} (2\ell + 1) = (2k + 1)!$$

Observe-se que quando a relação entre os parâmetros m e n, é tal que m - n, ou m + n, são números inteiros negativos, uma das série-soluções (VII.7.37) trunca-se num polinômio.

Quando os parâmetros, m e n, não estão relacionados da maneira apontada anteriormente, surgem dificuldades devido à divergência das série-soluções nos pontos $x = \pm 1$, pois,

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{C_k}{C_{k-2}} x^2 \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{(k + m - n - 2)(k + m + n - 1)}{k(k - 1)} x^2 \right| = x^2$$

Por esta razão, a solução da equação diferencial Associada de Legendre, com solução finita nos pontos $x = \pm 1$, é dada por:

$$y(x, m, n) = v(x, m, n)\,(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \qquad \text{(VII.7.38)}$$

onde os parâmetros m e n são relacionados de maneira que v(x, m, n) seja um polinômio. Soluções do tipo (VII.7.38) formam a base das chamadas Funções Associadas de Legendre $P_n^m(x)$.

7.8 - CASOS ESPECIAIS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Todos os métodos expostos para as soluções de E.Ds. lineares são de pouca utilidade na solução das não lineares. Na verdade, uma grande maioria das E.Ds não lineares, não têm soluções em forma fechada, tendo-se que apelar às soluções numéricas. Contudo, existem determinados tipos de equações não lineares cujas soluções podem ser encontradas com a ajuda de artifícios. Por exemplo, as E.Ds. não lineares de primeira ordem podem ser resolvidas pelos métodos expostos na seção 7.2.

Nesta seção serão apresentados métodos que, dependendo da forma da E.D. diminuem a ordem da equação, de maneira a facilitar sua solução. Estes métodos, que na realidade são apenas mudanças apropriadas de variável, são úteis nas soluções de E.Ds. não-lineares de segunda ordem, que são as que aparecem mais frequentemente em problemas de Física.

Considere-se uma E.D não-linear, reduzida, expressa na forma

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots . y^{(n)}) = 0 \qquad \text{(VII.8.1)}$$

Dependendo da ausência de uma (ou várias) das váriaveis x, y', y'' etc. desta equação, pode-se diminuir a ordem de (VII.8.1).

7.8.1 - A E.D. não Contém y, nem suas Derivadas até a Ordem k - 1

$$\Phi(x, y^{(k)}, y^{(k-1)}, \dots y^{(n)}) = 0. \qquad \text{(VII.8.2)}$$

Neste caso, define-se uma nova variável dependente

$$p = y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$$

Desta maneira (VII.8.2), fica:

$$\Phi(x, p, p', \dots\dots p^{(n-k)}) = 0,$$

onde se pode observar que a nova E.D., agora na variável p, diminui até a ordem $n - k$.

EXEMPLO 7.49

$$x^2 y' y'' + x(y')^2 = 1.$$

Fazendo-se $y' = p$, tem-se que

$$x^2 p \frac{dp}{dx} + x p^2 = 1.$$

$$x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} p^2 \right) + x p^2 = 1$$

$$\frac{d}{dx} (p^2) + \frac{2}{x} p^2 = \frac{2}{x^2} .$$

Esta última E.D é uma linear de primeira ordem em p^2. Portanto, sua solução é:

$$e^{\int \frac{2}{x} dx} p^2 = \int \frac{2}{x^2} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C_1$$

$$p^2 = x^{-2} (2x + C_1)$$

$$p = \pm \frac{1}{x} \sqrt{2x + C_1} .$$

Integrando-se este resultado, tem-se

$$y = \pm 2 \sqrt{2x + C_1} \pm C_1 \int \frac{dx}{x \sqrt{2x + C_1}} + C_2$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{2x + C_1}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \ell n \frac{\sqrt{2x + C_1} - \sqrt{C_1}}{\sqrt{2x + C_1} + \sqrt{C_1}}$$

Assim, finalmente

$$y = \pm 2\sqrt{2x + C_1'} \pm \sqrt{C_1'}\, \ell n\left(\frac{\sqrt{2x + C_1'} - \sqrt{C_1'}}{\sqrt{2x + C_1'} + \sqrt{C_1'}}\right) + C_2$$

7.8.2 - A E.D. não Contém a Variável x

$$\Phi(y,\ y',\ y'',\ \ldots\ldots\ y^{(n)}) = 0 \qquad \text{(VII.8.3)}$$

Equações deste tipo, onde a variável x não aparece de forma explícita, podem ser diminuidas de ordem, definindo uma nova variável dependente.

$$y' = p.$$

Assim,

$$y'' = \frac{d}{dx}\, p = \frac{dp}{dy}\ \frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}$$

$$y''' = \frac{d}{dy}\left(p\,\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p\left[\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p\,\frac{dp}{dy}\right],$$

e sucessivamente. Note-se, primeiramente, que a nova variável "independente" é y, e depois, que as derivadas $\frac{dp}{dy}$ são de uma ordem inferior às $\frac{dy}{dx}$. Portanto, a E.D. (VII.8.3) fica:

$$\Psi(y,\ p,\ p',\ p'',\ \ldots\ldots\ p^{(n-1)}) = 0,$$

onde

$$p' = \frac{dp}{dy} .$$

EXEMPLO 7.50

Seja resolver a E.D.

$$y^2\, y'' = -\frac{1}{2} ,$$

sujeita às condições iniciais

$$y(0) = 1 \qquad e \qquad y'(0) = 1.$$

Fazendo-se as substituições aconselhadas para este caso a E.D fica:

$$y^2\, p\, \frac{dp}{dy} = -\frac{1}{2} .$$

Integrando-se esta nova equação vem

$$p = \pm\sqrt{\frac{1}{y} + C_1} = y' .$$

Pode-se notar que uma integração ulterior não seria mui_ to fácil. Portanto, é melhor aplicar as condições iniciais, nesta ex_

pressão, para o cálculo de C_2. Pode-se verificar que $C_1 = 0$. e que o si_
nal deve ser positivo, assim:

$$y^{\frac{1}{2}}\, dy = dx.$$

Finalmente,

$$y = \left(1 + \frac{3}{2} x \right)^{\frac{2}{3}}$$

Este exemplo mostra as dificuldades de integração ao se tentar obter uma solução geral, ou mesmo quando as condições iniciais não simplificam a integração.

7.8.3 - A. E.D. é uma Exata

O significado de diferencial exata, é o mesmo que foi introduzido nas equações de primeira ordem. Isto é, a E.D. a ser re_
solvida é o resultado da derivação de uma E.D. "primitiva", que resul_
ta numa ordem, evidentemente, inferior em um grau.

$$\Phi(x, y, y', y'' \ldots . y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Psi(x, y, y', \ldots . y^{(n-1)}) = 0 \quad \text{(VII.8.4)}$$

Nestes casos, depende da habilidade pessoal o reconheci_
mento da E.D. primitiva, que também é chamada de primeira integral, em_
bora o emprego deste termo não signifique, necessariamente, uma solu_

ção da E.D. em si. A primeira integral, pode ser de solução menos complicada.

Em geral, não existe um critério que permite o reconhecimento de uma E.D. exata. Contudo, quando a E.D. é linear, é possível se encontrar um critério.

Considere-se a E.D. linear

$$f_n(x)\, y^{(n)} + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + f_2(x)\, y'' + f_1(x)\, y' + f_0(x)\, y = F(x) \qquad \text{(VII.8.5)}$$

Nesta relação, o termo $f_1(x)\, y'$ pode ser colocado também na forma

$$f_1(x)\, y' = \frac{d}{dx}(f_1 y) - f_1' y$$

Analogamente,

$$f_2(x)\, y'' = \frac{d}{dx}(f_2 y') - f_2' y' = \frac{d}{dx}(f_2\, y') - \frac{d}{dx}(f_2' y) + f_2'' y$$

$$= \frac{d}{dx}(f_2 y' - f_2' y) + f_2'' y$$

$$f_3(x)\,y''' = \frac{d}{dx}\,(f_3\,y'' - f_3'\,y' + f_3''\,y) - f_3'''\,y$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f_n(x)\;y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left[f_n\;y^{(n-1)} - f_n'\,y^{(n-2)} + \;.....\; + (-1)^{n-1} f_n^{(n-1)}\;y\right] +$$

$$+\;(-1)^n\;f_n^{(n)}\;y.$$

Esta última expressão ainda pode ser escrita de uma maneira mais compacta como se segue

$$f_n(x)\,y^{(n)} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f_n^{(k)}\;y^{(n-k-1)} + (-1)^n\;f_n^{(n)}\;y.$$

Substituindo-se todas estas expressões na equação (VII.8.5), vem

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\;f_n^{(k)}\;y^{(n-k-1)} + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\;f_{n-1}^{(k)}\;y^{(n-k-2)} + ... +\right.$$

$$\left. + f_2\,y' - f_2'\,y + f_1\,y\right] + \left[(-1)^n\;f_n^{(n)}\,y + (-1)^{n-1}\;f_{n-1}^{(n-1)} + \;......+\right.$$

$$\left. + f_2'' - f_1' + f_0\right] y = F(x). \qquad \text{(VII.8.6)}$$

Evidencia-se que o membro da direita resulta numa diferencial exata, sempre que o último colchete for identicamente nulo. Isto é,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \overset{(k)}{f_k(x)} = 0 \qquad \text{(VII.8.7)}$$

é a condição para que a E.D. resultante, depois de integrada, seja de uma ordem inferior.

EXEMPLO 7.51

$$yy'' + y'^2 + 1 = 0.$$

Note-se que os dois primeiros termos podem ser agrupados, convenientemente, na forma:

$$yy'' + y'^2 = \frac{d}{dx}(yy').$$

Logo,

$$d(yy') = -\,dx$$

$$yy' = -x + C_1.$$

Integrando-se mais uma vez

$$y\,dy = (-x + C_1)\,dx,$$

tem-se o resultado

$$y^2 = C_2 + C_1 x - x^2.$$

EXEMPLO 7.52

Seja resolver a E.D.

$$(1 + x^2)\, y'' - 2\, y = 2x.$$

Pode-se ver que

$$f_2(x) = 1 + x^2 \ , \quad f_1(x) = 0 \quad ; \quad f_0(x) = -2 \, .$$

Portanto, a relação (VII.8.7), para este caso, fica:

$$f_0 - f_1' + f_2'' = 0$$

Desta maneira, a E.D. (VII.8.6) fica:

$$\frac{d}{dx} \left[f_2 y' - f_2' y + f_1 y \right] = 2x \, .$$

Substituindo-se os valores de $f_1(x)$ e $f_2(x)$, e integrando-se o resultado, tem-se:

$$(1 + x^2)\, y' - 2xy = x^2 + C_1.$$

Observe-se que esta nova equação é uma linear de primeira ordem, cuja solução pode ser obtida mediante (VII.2.13)

$$y(x) = (C_1 - 1)x + C_1(1 + x^2)\ \mathrm{arctg}\, x + C_2(1 + x^2).$$

7.8.4 - Equação Homogênea de Ordem n

Uma E.D., de ordem n, é chamada de homogênea de grau m quando, ao se substituir y por ay, a E.D apresenta a propriedade:

$$\Phi(x, ay, ay', \ldots ay^{(n)}) = a^m\, \Phi(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0. \qquad \text{(VII.8.8)}$$

Observe-se que este é o mesmo conceito de homogeneidade introduzido para as E.D. de primeira ordem, com a diferença de que, neste caso, x é considerado uma variável "adimensional". Nestes casos, quando se procura uma solução na forma

$$y = e^{v(x)}, \qquad \text{(VII.8.9)}$$

a ordem da E.D. fica diminuida em uma unidade.

$$y' = e^v v' \ ; \quad y'' = (v'' + v'^2)\, e^v \ ; \quad y''' = (v''' + 3v'\, v'' + v'^3)\, e^v$$

etc.

Substituindo-se estas relações na E.D. (VII.8.8) tem-se:

$$\Phi\left[x, e^{v}, (v'' + v'^2)\, e^{v}, \ldots\right] = e^{mv}\, \Phi\,(x, v', v'', \ldots v^{(n)}) = 0,$$

onde se pode ver que a nova E.D, é uma de ordem $n-1$ em v'.

É interessante notar que uma E.D. linear reduzida é uma equação homogênea e, portanto, em princípio, é possível diminuí-la de ordem, procurando-se soluções do tipo (VII.8.9). Entretanto, a E.D. que se obtém (já diminuida) resulta numa não linear, cuja solução em geral é muito mais difícil de ser encontrada.

Contudo, existem E.Ds. que, com (VII.8.9), dão lugar a equações de mais fácil solução.

EXEMPLO 7.53

$$2yy'' - 3y'^2 = 4y^2.$$

Pode-se ver que esta equação é uma homogênea. Assim, com $y = e^{v(x)}$, obtém-se:

$$2(v'' + v'^2) - 3\, v'^2 = 4$$

$$2v'' - v'^2 = 4.$$

Esta é uma equação de primeira ordem em v', onde as variáveis já se encontram separadas, Integrando-se esta E.D., tem-se:

$$v' = 2\ \mathrm{tg}\,(x + C_1),$$

de onde,

$$v = -\ 2\,\ell n \cos(x + C_1) + \ell n\, C_2 = \ell n\left(\frac{C_2}{\cos^2(x + C_1)}\right).$$

Portanto, a solução fica:

$$y = \frac{C_2}{\cos^2(x + C_1)}$$

7.8.5 - Equações Isobáricas

O mesmo conceito de funções isobáricas, que foi introduzido nas E.Ds. de primeira ordem, aplica-se também para o caso de E.Ds. de ordem superior. Isto é, quando se atribui às variáveis x e y, de uma E.D., as dimensionalidades de a e a^r, respectivamente, e a E.D, resulta dimensionalidade homogênea, então ela é chamada equação isobárica.

As E.Ds. que apresentam esta propriedade podem ter diminuidas suas ordens em uma unidade, fazendo-se a troca

$$y = x^r v,$$

onde r é um parâmetro que se determina de maneira que aconteça a homogeneidade.

EXEMPLO 7.54

$$x^4 y'' = (y - xy')^3 .$$

Atribuindo-se as dimensionalidades $x \to ax$; $y \to a^r y$, tem-se:

$$(ax)^4 \frac{d^2 (a^r y)}{d(ax)^2} = \left[a^r y - ax \frac{d(a^r y)}{d(ax)} \right]^3 .$$

Logo, a "expressão dimensional", é:

$$a^{2+r} = a^{3r}$$

de onde, $r = 1$.

Assim, a mudança de variável apropriada é: $y = xv$

Por outro lado,

$$y' = v + xv' \quad ; \quad y'' = 2v' + xv'$$

Com estas substituições, a E.D. fica

$$2v' + xv'' = - x^2 \, v'^3$$

de onde,

$$v'' + \frac{2}{x} v' = - x \, v'^3.$$

Esta é uma equação de Bernoulli em v'. O processo de integração, deste tipo de E.D. de primeira ordem, foi descrito na subseção 7.2.4. Pode-se verificar que:

$$v' = \frac{1}{x \sqrt{C_3 x^2 - 1}},$$

de onde

$$v = \int \frac{dx}{x \sqrt{C_3 \, x^2 - 1}} + C_2 = \text{arc sec } |C_1 \, x| + C_2$$

Finalmente,

$$y = x(\text{arc sec } |C_1 \, x| + C_2).$$

BIBLIOGRAFIA

BRAND, L. *Differential and difference equations.* New York, N.Y., John Wiley, 1976.

BURKILL, J.C. *The theory of ordinary differential equations.* Edinburgh, Oliver and Boyd, 1962. (University Mathematical texts).

CODDINGTON, E.A. *An introduction to ordinary differential equations.* Englewood Cliffs, N.Y., Prentice-Hall, 1961.

ELSGOLTS, L. *Differential equations and calculus of variations.* Moscow, MIR, 1977.

FORD, L.R. *Differential equations.* New York, N.Y., MacGraw-Hill, 1955.

GREENSPAN, D. *Theory and solution of ordinary differential equations.* New York, MacMillan, 1960.

INCE, E.L. *Integration of ordinary differential equations.* Edinburgh, Oliver and Boyd, 1963. (University Mathematical texts).

KAPLAN, W. *Ordinary differential equations.* Reading, M.A., Addison--Wesley, 1958.

MATHEWS, J.; WALKER, R.L. *Mathematical methods of physics.* 2 ed. Melo Park, C.A., W.A. Benjamin, 1973.